Доказательство Семенова теоремы о мотивном разложении норменного многообразия

$a, b, c \in F^\times/(F^\times)^3$

$\{a, b, c\} \in K_3(F)/3$

задано образующими и соотношениями: $\{ab, x, y\} = \{a, x, y\} + \{b, x, y\}$
$\{a, 1-a, *\} = 0$

$A = (a, b)_3$ — циклическая степени 3

$= \langle x, y \mid x^3 = a, y^3 = b, xy = \zeta yx \rangle$

к F можно присоединить $\sqrt[3]{1}$ и ничего не поменяется

$(\zeta^2 + \zeta + 1 = 0$ — квадратное$)$

$Nrd : A \longrightarrow F$ — скрученная форма определителя

$\det : M_3(F) \longrightarrow F$

приведенная норма

$SL_1(A) = \{x \in A \mid Nrd(x) = 1\}$ — группа типа A_2

можно вместо этого рассмотреть торсор

$\{x \in A \mid Nrd(x) = c\}$ — на нем $SL_1(A)$ действует умножением;

и над $\overline{F}$ это изоморфно $SL_1(A)$

$\rightsquigarrow$ это действительно $SL_1(A)$-торсор

Можно доказать, что он тривиален $\Leftrightarrow \{a, b, c\} = 0$

Его $\dim = 8$.

С символом $\{a, b, c\}$ мы связали хорошее многообразие, но оно аффинно, а мы хотим найти гладкое проективное многообразие с действием $SL_1(A)$ такое, что это многообразие живет внутри как открытое подмногообразие (это его гладкая эквивариантная компактификация). Это сделали Меркурьев и Суслин

// вообще говоря, таких компактификаций много, но у них

// внешние мотивы одинаковы. Мы построим „минимальное" такое

Сначала приведем конструкцию спуском. $A_{\overline{F}} = M_3(F)$

$(A \oplus A)_{\overline{F}} \supseteq \{\alpha \oplus \beta \in (A \oplus A)_{\overline{F}} \mid Nrd(\alpha) = c \cdot Nrd(\beta), rk(\alpha \oplus \beta) = 3\}$

профакторизуем его по действию $GL_1(A_{\overline{F}})$ левыми сдвигами

Наш торсор живет в нем как (главное) открытое подмн-во $Nrd(\beta) \neq 0$

Получили что-то над $\overline{F}$, потом спускаем.

Более инвариантно: если забыть про условие $Nrd(\alpha) = c \cdot Nrd(\beta)$, останется скрученная форма $Gr(3, 6)$ — это уже над F.

и понятно, какая именно форма:

 — изотропная группа, анизотропное ядро которой — $SL_1(A)$

группа $SL_2(A)$ — скрученная форма SL_6

Соответствующее однородное проективное: $SL_2(A)/P$

Оно 9-мерное:  $P = \left\{\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}\right\}$

$\frac{5\cdot 6}{2} = 15$ — всего полож. корней

$3+3$ — в подгруппе Леви $\rightsquigarrow 15-6=9$

Степени фунд. инвариантов A_5: $\cancel{2}, \cancel{3}, 4, 5, 6$

у A_2+A_2: $\cancel{2}, \cancel{3}, 2, 3$

Осталось
$$\frac{\frac{t^4-1}{\cancel{t-1}}\cdot\frac{t^5-1}{\cancel{t-1}}\cdot\frac{t^6-1}{t-1}}{\frac{t^2-1}{\cancel{t-1}}\cdot\frac{t^3-1}{\cancel{t-1}}}$$
//

$$P(t) = (t^2+1)(t^3+1)(t^4+t^3+t^2+t+1)$$ — его полином Пуанкаре

Теперь вспомним про уравнение $\mathrm{Nrd}(\alpha) = c\cdot\mathrm{Nrd}(\beta)$

$Gr(3,6)$ живет внутри $\mathbb{P}\big(\underbrace{\Lambda^3(\mathbb{F}^6)}_{\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}=20}\big)$

Относительно копии $G_m \cong \left\{\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1}\end{pmatrix}\right\}$ оно раскладывается в сумму
$$1+9+9+1$$

или ограничить на $SL_1(A)\times SL_1(A)$

соответствует $\mathrm{Nrd}(\alpha)$ $\quad\alpha\quad\beta\quad$ $\mathrm{Nrd}(\beta)$

$\rightsquigarrow$ ур-ние $\mathrm{Nrd}(\alpha) = c\cdot\mathrm{Nrd}(\beta)$ задает гиперплоское сечение.

Можно доказать, что оно в общем положении $\rightsquigarrow$ по т. Бертини — гладкое

т.е. мы рассматриваем конкретное гиперплоское сечение:

$(1, 0, 0, c)$

орбита этого вектора отн-но подгруппы Леви открыта.

— наша скрученная форма $Gr(3,6)$

$X \hookrightarrow SB_3(M_2(A))$

гиперплоское сечение

Над замыканием X клеточное: если взять кохарактер тора SL_6 в общем положении, то соответствующее G_m действует с изолированными неподвижными точками на $SB_3(M_2(A))$

$$1+9+9+1$$

трив. представление

представление $SL_3\times SL_3$: $\omega_1\otimes\omega_3$, $\omega_3\otimes\omega_1$

Рассмотрим вектор: все коэффициенты, кроме одного, из этих 20, равны 0. Это и будет неподвижная точка G_m.

Внутрь X из этих 20 точек попадает 18
(кроме $(1,0,0,0)$ и $(0,0,0,1)$)
$\rightsquigarrow$ по теореме Бялыницки–Бирули X — клеточное с 18 клетками.
Число клеток $= P(1)$

Теорема Лефшеца

$X \hookrightarrow Y$ — гиперплоское сечение, оба клеточные

$CH_i(X) \xrightarrow{\sim} CH_i(Y)$, если $i < \frac{\dim X}{2}$

инъекция, $= \frac{\dim X}{2}$

$CH^i(Y) \xrightarrow{\sim} CH^i(X)$, если $i < \frac{\dim X}{2}$

инъекция, $= \frac{\dim X}{2}$

в прошлый раз было написано $\dim(Y)$ — ошибка!

$$P(x,t) = t^8 + t^7 + 2t^6 + 3t^5 + ?\cdot t^4 + 3t^3 + 2t^2 + t + 1$$

— по теореме Лефшеца

с другой стороны, $P(1) = 18$ $\rightsquigarrow$ $? = 4$.

X имеет рациональную точку $\Leftrightarrow \{a,b,c\} = 0$. Почему?
$\Leftarrow$ автоматически
X относительно $SL_1(A) \times SL_1(A)$ состоит из каких-то орбит
Открытая орбита — наш торсор, на котором $SL_1(A) \times SL_1(A)$ действует умножениями слева и справа. На замкнутой орбите не может быть рациональной точки (иначе уже $\{a,b\} = 0$), поскольку $SL_1(A)$ изотропна)
Вроде бы, других орбит нет. А если вдруг и есть, надо посмотреть на стабилизатор.

Значит, внешний мотив X такой же, как у нормённого многообразия
(X Y $X_{F(Y)}$ $Y_{F(X)}$ $\rightsquigarrow$ внешние мотивы mod p совпадают)
$X \hookrightarrow Y$

Теорема (Вишик–Зайнуллин)

Пусть Z — однородное проективное многообразие,
в $M(Z) \otimes \mathbb{Z}/p$ есть прямое слагаемое M
Пусть N — какой-то мотив Чжоу, и есть морфизм $N \longrightarrow M$
Предполагаем, что над $F(Z)$

1. $N_{F(Z)}$ и $M_{F(Z)}$ — суммы сдвинутых мотивов Лефшеца
2. $N_{F(Z)} \longrightarrow M_{F(Z)}$ сюръективно на уровне CH (т.е. расщепляется)

Тогда $N \to M$ над базой тоже является проекцией на прямое слагаемое: $N \cong M \oplus M'$

В нашей ситуации: мы знаем мотивное разложение Y

 — на Y действует $\mathbb{G}_m$ $\rightsquigarrow$ $M(Y)=\mathbb{Z}/3\oplus\mathbb{Z}/3\{9\}\oplus\bigoplus_{i=1}^{6} M(SB(A))\{i\}$

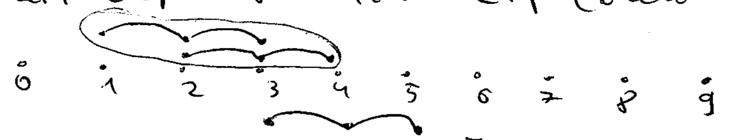
Есть морфизм $M(X)\longrightarrow M(Y)$, индуцированный вложением

В качестве Z возьмем многообразие, у которого есть прямое слагаемое $\bigoplus_{i=1}^{6} M(SB(A))\{i\}$; т.е. то, которое раскладывается в сумму $M(SB)$ — например, $SB\times SB\times\ldots$

Над $F(Z)$ и $M(SB(A))$, и $M(X)$ раскладываются в сумму мотивов Лефшеца

Надо посчитать теперь образ $M(X)$ в $M(Y)$.

По теореме Лефшеца до середины размерности получаем сюръекцию на CH (отсюда следует условие (2) теоремы)



$$M(X)=R(\{a,b,c\})\oplus\bigoplus_{i=1}^{5} M(SB(A))$$

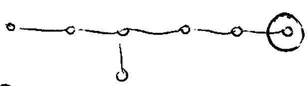
Следующее обобщение: $K_4/3$

$\{a,b,c,d\}$

— строим по $\{a,b,c\}$ 27-мерную йорданову алгебру J

$\{N = d\}$ — форма E_6/F_4

У него есть компактификация — гиперплоское сечение E_7/P_7:

 56-мерное $\rightsquigarrow 1+27+27+1$

дальше так же: т. Бертини, полином Пуанкаре, теорема Вишика–Зайнуллина, ...

соотв. пфистерово должно иметь размерность 52

В предыдущем случае пфистерово $= E_6/P_6$ для символа $\{a,b,c\}$

$$E_6/P_6\subset \mathbb{P}(A\oplus A\oplus A)$$
$$[x:y:z]$$
$$x^{\#}=yz,\quad y^{\#}=czx,\quad z^{\#}=c^{-1}xy$$

Если ограничиться на $N(z)\neq 0$, останется многообразие $Nrd(x)=c\cdot Nrd(y)$