07.05.2012

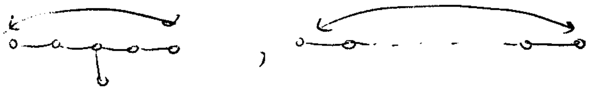
Многообразия, однородные относительно действия групп внешнего типа

Раньше мы брали $\xi \in H^1(F, G)$, G — расщепимая

Теперь будет $\xi \in H^1(F, \mathrm{Aut}(G)) = H^1(F, G^{ad} \rtimes \mathrm{Aut}(D))$

если G односвязная или присоединенная (иначе — подгруппа в $\mathrm{Aut}(D)$)

примеры



$$H^1(F, G^{ad}) \to H^1(F, G^{ad} \rtimes \mathrm{Aut}(D)) \longrightarrow H^1(F, \mathrm{Aut}(D))$$

а это просто действие группы Галуа на диаграмме Дынкина

$\boxed{\text{Пример}}$ Унитарная группа

L/F — квадратичное расширение $\to$ есть инволюция $\bar{\ }$

V — векторное пространство над L с базисом $e_1, \dots, e_\ell, e_{-\ell}, \dots, e_{-1}$

$$V \times V \xrightarrow{h} L$$

$$h_0\left(\sum e_i a_i, \sum e_j b_j\right) = \sum \bar{a}_i b_{-i}$$ — эрмитова форма (она будет давать квази-расщепимую группу)

$$\{g \in GL(V_L) \mid h_0(gu, gv) = h_0(u, v)\ \forall u, v \in V\} = U(V, h_0)$$

— алгебраическая группа над F (редуктивная, а SU — полупростая)

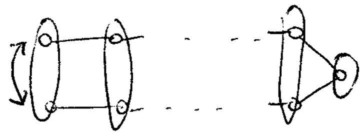
типа $^2A_{2\ell-1}$

В ней есть борелевская подгруппа, определенная над базой — т.е. она <u>квазирасщепимая</u>. G_{qs}

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & G^{ad} \arrow[r] & G^{ad} \rtimes \mathrm{Aut}(D) \arrow[r] & \mathrm{Aut}(D) \arrow[r] \arrow[l, bend left, dashed, "\text{сечение}"] & 1 \end{tikzcd}$$

$\Downarrow$

есть сечение и на уровне H^1

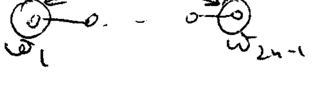


У квазирасщепимой группы все орбиты в индексе Титса обведены.

$$\xi \in H^1(F, G^{ad} \rtimes \mathrm{Aut}(D))$$
$$\Updownarrow$$
$$\xi \in H^1(F, G^{ad}_{qs})$$ — тоже задает группу внешнего типа

$\boxed{\text{Упр.}}$ $L = F \times F$, инволюция $(a, b) \longmapsto (b, a)$

Посчитать $U(L^{2n}, h) \simeq GL_{2n}(F)$ в представлении: сумма естественного и контраградиентного



$(\omega_1 + \omega_{2n-1})$

Вместо $h_0 = \sum \bar{a}_i b_i$ можно рассмотреть любую другую эрмитову форму h, которая становится изометричной h_0 над замыканием

$$H^1(F, \underset{\substack{\shortparallel \\ U(V,h_0)}}{\mathrm{Isom}(h_0)}) \longleftrightarrow h$$

$$U(V, h_0) \longleftrightarrow U(V, h)$$

Пример проективного однородного многообразия

$$\underset{\in \mathbb{P}(V)}{\langle u \rangle} : h(u,u) = 0$$

Аналог теоремы Витта: оно однородное

Другое объяснение: $L/F \longrightarrow L \times L / L$

$U(V) \rightsquigarrow GL_{2l}(L)$ – в представлении $\omega_1 + \omega_{2l-1}$

$h(u,u) = 0 \rightsquigarrow v^t w = 0$

квадратичное уравнение – Incidence variety

оно однородное

Для того, чтобы посчитать $\mathcal{U}(X)$
верхний мотив

можно перейти к Y: $X_{F(Y)}$, $Y_{F(X)}$ имеют рац. точку

$\longrightarrow$ тогда $\mathcal{U}(X) = \mathcal{U}(Y)$

Посмотрим на $h(u,u) = 0$. Здесь $\langle u \rangle$ — L-прямая

Давайте рассмотрим многообразие F-прямых, удовлетворяющих тому же самому уравнению.

Это уже обычная квадрика

Если $X = \{h(u,u) = 0, \langle u \rangle - L\text{-прямая}\}$ $\rightsquigarrow \mathcal{U}(X) = \mathcal{U}(Y)$

Y — квадрика

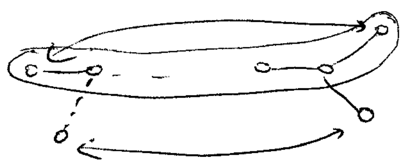
${}^2A_{2l-1} \rightsquigarrow D_{2l}$ – вложение

$\downarrow$

$H^1(F, {}^2A_{2l-1}) \longrightarrow H^1(F, D_{2l})$

Ядро этого отображения тривиально

A_{2l-1}



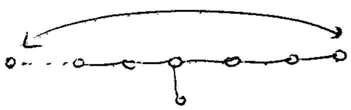
D_{2l}

$\to A_{2l-1} \rtimes \mathbb{Z}/2 \longrightarrow D_{2l}$

$\{g \in GL(V), L\text{-линейное, сохр. } h\}$

$\bigcap$

$\{g \in GL(V), F\text{-линейное, сохр. } h\} = O(\dots)$

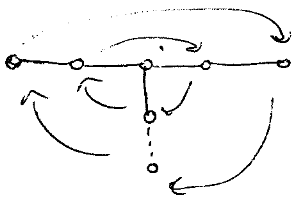


$\rightsquigarrow {}^2E_6 \hookrightarrow E_7$

$$H^1(F, {}^2E_6) \longrightarrow H^1(F, E_7)$$

ядро тривиально

$$\mathcal{U}\left({}_\xi\left({}^2E_6/P_{1,6}\right)\right) \simeq \mathcal{U}\left({}_\xi(E_7/P_7)\right)$$



$\rightsquigarrow {}^3D_4 \hookrightarrow E_6$

$\boxed{\text{Теорема}}$ (Карпенко)

$\xi \in H^1(F, \mathrm{Aut}(G))$, $X = {}_\xi(G/P)$, P устойчива относительно $\mathrm{Aut}(D)$

p — простое число. Тогда все неразложимые мотивные слагаемые X изоморфны $\mathcal{U}(Y)$, где Y — многообразие, однородное относительно G_E, где $F \leq E \leq L$

$\boxed{\text{Пусть } L/F \text{ — наименьшее расширение, убивающее } * \text{-действие (на } D \text{ группы Галуа)}}$

$$\begin{array}{c} Y \\ \downarrow \\ \operatorname{Spec} E \longrightarrow \operatorname{Spec} F \end{array}$$

Мы рассматриваем Y как многообразие над F таким вот наивным образом (это не ограничение Вейля!)

$\sigma : \overline{F} \to \overline{F}$ $\rightsquigarrow$ взять пулбэк

Группа Галуа действует на $CH^*(X_{\overline{F}})$. Описание этого действия:

$\sigma : \alpha_i \longmapsto \alpha_{\sigma(i)}$ — действие на системе корней

$s_{\alpha_i} \longmapsto s_{\alpha_{\sigma(i)}}$ — действие на группе Вейля

$\overline{BwP/P} \longmapsto \overline{B\sigma(w)P/P}$ — действие на CH^*

Можно посмотреть на мотивы:

Любое мотивное слагаемое (X, q)

$\mathrm{Im}(q_{\overline{F}})$ как подгруппа в $CH^*(X_{\overline{F}})$ инвариантна относительно этого действия

$\mathcal{U}(Y)$, Y определено над E

В частности, если $E=F$, то $\mathcal{U}(Y)$ $*$-инвариантно

$\rightsquigarrow$ внутри $M(X)$ он может попасть только в $*$-инвариантную часть.

$\boxed{\text{Теорема}}$ ① $\xi \in H^1(F, {}^2A_n^{sc})$, $p=2$

это означает, что соотв. группа строится по L/F-эрмитовой форме (алгебра Титса тривиальна)

② $\xi \in H^1(F, {}^2E_6)$, $p=2$

③ $\xi \in H^1(F, {}^3D_4)$, $p=3$

X — многообразие: $\xi_{F(X)} = 1$

(аналог того, что мы раньше называли клеточным над общей точкой)

Тогда $M(X) \otimes \mathbb{Z}/p$ раскладывается в сумму

$R_p(\xi_L)$ со сдвигами и ~~верхнего мотива~~ $R_p(\zeta)$ со сдвигами, где

соответствует коциклу внутреннего типа

образ ξ

в (1) это просто $\mathrm{Spec}(L)$, рассматриваемый как многообразие над $\mathrm{Spec}(F)$

(1) ~~D_{n+1} — многообразие~~ $\zeta \in H^1(F, D_{n+1})$

(2) $\zeta \in H^1(F, E_7)$

(3) $\zeta \in H^1(F, E_6)$

ζ продуцирует многообразие, клеточное над общей точкой

При этом сдвиги восстанавливаются однозначно: слагаемые второго типа заполняют всю $*$-инвариантную часть т.е. нужно делить $P(CH^*(X_{\bar F})^{Gal(\bar F/F)}, t)$

на $P(R_p(\zeta), t)$

Доказательство: комбинация того, что мы знаем, и тривиальности ядра $H^1(F, {}^2A_n) \to H^1(F, D_{n+1})$ и т.д.

Даниэль Крашен:

$X = \{L\text{-прямые, натянутые на } u \mid h(u,u) = 0\}$

$Y = \{F\text{-прямые, натянутые на } u \mid h(u,u) = 0\}$

Тогда $M(X) \otimes \mathbb{Z}/2$ раскладывается в сумму сдвигов $M(Y) \otimes \mathbb{Z}/2$ и $M(\mathrm{Spec}\, L) \otimes \mathbb{Z}/2$

заполняют $*$-инвариантную часть.

Доказательство похоже на подсчет мотива $M(\xi(F_4/P_4)) \otimes \mathbb{Z}/2$

(там J — 27-мерная йорданова алгебра, $J = H_3(\mathbb{O})$

E_6/P_6 — многообразие прямых, натянутых на идемпотенты

Можно вместо этого рассмотреть $J = H_n(L)$

и нарисовать аналогичную картинку

$\boxed{\text{Гипотеза}}$ $\mathcal{U}(X)$ всегда $*$-инвариантен.

$\xi({}^2E_6/P_{1,6})$ — интересный пример, там есть гипотеза, как выглядит мотивное разложение. Видимо, это самый простой нетривиальный случай

В следующий раз: • мотивы нормельных многообразий (там несколько орбит действия группы)

геометрия сферических многообразий (семинар в сентябре 2012?)

• рассказ о деятельности Карпенко