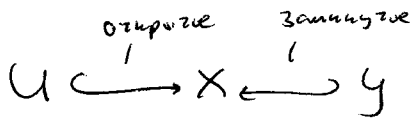
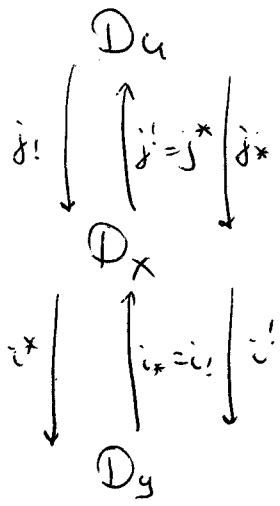


Н. Ардинцев



— продолжение доклада
К. Чепурихина



+ данные склейки

Утверждение ~~Результат~~

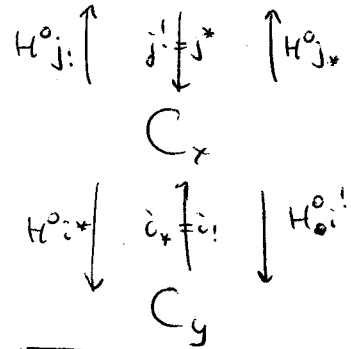
- ① $j^* = j^!$ — t -точка,
 $i_* = i_!$ — t -точка
- ② $j^!, i_*$ — t -точки справа,
 $j_*, i^!$ — t -точки слева.

Док-во. $j^* = D_X \longrightarrow D_U$
Например: $F \in D_X^{\geq 0} \longrightarrow j^! F = j^* F \in D_U^{\geq 0}$

Далее — упражнение на определения (сопряженность покажется) $\square$

Если есть функторы t -точные с какой-то стороны, то можно их перенести на ядра

У-в $C_U = D_U^{\geq 0} \cap D_U^{\leq 0}$



— эти функторы точны с нужных сторон, сопряжены и удовлетворяют тождествам про ассоциативность и композицию.

Лемма $F \in C_X$

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow (p_{i_*})(H^{-1} i^*) F \longrightarrow (p_{j^!})(p_{j^*}) F \longrightarrow F \longrightarrow (p_{j_*})(p_{i^*}) F \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow (p_{i_!})(p_{i^!}) F \longrightarrow F \longrightarrow (p_{j_*})(p_{j^*}) F \longrightarrow (p_{i_*})(H^{-1} i^!) F \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Доказ.

$$\begin{array}{ccccccc} j_! j^! \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & i_* i^* \mathcal{F} & \longrightarrow & \\ i_! i^! \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & j_* j^* \mathcal{F} & \longrightarrow & \end{array}$$

$$\downarrow H^*(-)$$

$$\begin{array}{ccccccccc} H^{-1} \mathcal{F} & \longrightarrow & H^{-1} i_* i^* \mathcal{F} & \longrightarrow & H^0 j_! j^! \mathcal{F} & \longrightarrow & H^0 \mathcal{F} & \longrightarrow & H^0 i_* i^* \mathcal{F} & \longrightarrow & H^1 j_! j^! \mathcal{F} \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 0 & & & & & & & & & & 0 \end{array}$$

i_* - точный $\sim$ можно переставить его с H^1

$$i_*^p (H^{-1} i^*) \mathcal{F}$$

Следствие

а) $\text{Im}(^p i_*) = \{ \mathcal{F} \in C_X \mid \mathcal{F} \simeq (H^0 i_*) (i^* \mathcal{F}) \} = \{ \mathcal{F} \mid j^* \mathcal{F} = 0 \}$
 б) $\text{Im}(^p j_*) = \{ \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \simeq H^0 j_* j^* \mathcal{F} \} = \{ \mathcal{F} \mid (H^0 i_*) \mathcal{F} = (H^1 i_*) \mathcal{F} = 0 \}$

Доказ.

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \simeq i_* \mathcal{G} &\xrightarrow{i^*} (H^0 i^*) \mathcal{F} \simeq i^* i_* \mathcal{G} = \mathcal{G} \\ &\xrightarrow{i_*} i_* (H^0 i^*) \mathcal{F} \simeq i_* \mathcal{G} = \mathcal{F} \\ &\Downarrow \\ ({}^p j_!) ({}^p j^*) \mathcal{F} &\simeq 0 \end{aligned}$$

Следствие

$\mathcal{F} \in C_X$

$$\mathcal{F} \longrightarrow {}^p i_* H^0 i^* \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

- наибольший фактор $\mathcal{F}$, лежащий в существенном образе C_Y (i_*)

$$0 \longrightarrow ({}^p i_!) (H^0 i^*) \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$$

- наибольший подобъект $\mathcal{F}$, лежащий в существенном образе C_Y

Доказ. $\mathcal{G} \in C_Y \sim \text{Hom}(i_* \mathcal{G}, \mathcal{F}) = \text{Hom}(\mathcal{G}, H^0 i^! \mathcal{F})$ ($i_!$)
 $= \text{Hom}(i_* \mathcal{G}, i_* H^0 i^! \mathcal{F})$

Опр.

$\mathcal{G} \in C_u$. $\mathcal{F}$ продолжает $\mathcal{G} \Leftrightarrow j^* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$

Ув. (промежуточное расширение)

$$\forall \mathcal{G} \in C_u \exists \mathcal{F} \in C_X \text{ такое, что } j_! (i^* \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$$

① $j^* \mathcal{F} \in D_Y^{<0}$

т.е. $(H^0 i^*) \mathcal{F} = 0$

② $i^! \mathcal{F} \in D_Y^{>0}$

$(H^1 i^*) \mathcal{F} = 0$

Доказ:

$\mathcal{F}$ — продолжение $\Leftrightarrow \forall$ подобъект / факторобъект (из $\mathcal{D}_Y$) нулевые

Пусть $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ — пром. расширения

$$i_! i^! \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow j_* j^* \mathcal{F}' \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}, -)$$

$$\text{Hom}(i_! i^! \mathcal{F}, i_! i^! \mathcal{F}') \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{F}') \longrightarrow \text{Hom}(j_* j^* \mathcal{F}, j_* j^* \mathcal{F}')$$

$\downarrow$
0 — аналогично

$\leadsto$ это изоморфизм

так проверяется единственность

Хотим найти стрелочку $j_! G \longrightarrow j_* G$

$$\text{Hom}(G, j_! j_* G) = \text{Hom}(j_!^* G, j_* G)$$

||

$$\text{Hom}(G, G) \xrightarrow{\text{id}} \text{Вот она!}$$

$$(H^0 j_!) G \xrightarrow{\zeta} H^0 j_* G$$

$$\text{Im } \zeta = M = j_* j_! G$$

Свойства легко проверяются

$$(H^0 i^*)(H^0 j_!) = 0 \leadsto \text{канон. фактор-объект } H^0 j_! G \text{ равен } 0$$

$\leadsto$ это и нулю

Второе — то же для подобъектов.

□