Глобальная цель: доказать, что функтор $X \longmapsto H^p(X,\mathcal{F})$ $(p\geq 0)$ гомотопически инвариантен, если $\mathcal{F}$ — гомотопически инвариантный пучок Нисневича с трансферами.

Мы уже знаем это для $p=0$ и $p=1$. Будем доказывать для $p\geq 2$

$\boxed{\text{Лемма}}$ $\mathcal{F} \in PreShNwT \Rightarrow \mathcal{F}^{\sim}_{Nis} \in PreShNwT$ и $\mathcal{F} \xrightarrow{can} \mathcal{F}^{\sim}_{Nis}$ — морфизм предпучков с трансферами

— мы будем этим пользоваться

$\boxed{\text{Следствие}}$ Категория $PreShNwT$ очевидно абелева, категория $SNwT$ тоже абелева

$\boxed{\text{Лемма}}$ В категории $SNwT$ достаточно много инъективных:

$\forall\, \mathcal{F}\ \exists\ 0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow I:\ I$ — инъективный в $SNwT$

$\rightsquigarrow$ есть $\mathrm{Ext}^i_{SNwT}(\mathcal{G},\mathcal{F}) := H^i(\mathrm{Hom}_{SNwT}(\mathcal{G}, I^\bullet))$

$\boxed{\text{Опр.}}$ $X \in Sm \rightsquigarrow \underset{\substack{\uparrow \\ SNwT}}{\mathbb{Z}_{tr}[X]}:\ \mathbb{Z}_{tr}[X](U) = Cor(U,X)$ — пучок

$\boxed{\text{Предложение}}$ $H^i_{Nis}(X,\mathcal{F}) \cong \mathrm{Ext}^i_{SNwT}(\mathbb{Z}_{tr}[X],\mathcal{F})$ — канонический изоморфизм

ближайшая цель

$\boxed{\text{Следствие}}$ Функтор $X \longmapsto H^i_{Nis}(X,\mathcal{F})$ снабжен каноническими трансферами, т.е. он лежит в $PreShNwT$

$$\mathbb{Z}_{tr}[U] \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}_{tr}[X] \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}[i] \rightsquigarrow \varphi^*(\alpha) := \alpha\circ\varphi$$

$$\mathrm{Hom}_{SNwT}(\mathbb{Z}_{tr}[U],\mathbb{Z}_{tr}[X]) = \mathbb{Z}_{tr}[X](U) = Cor(U,X)$$

представимый U л. Йонеда

$$\Downarrow$$

$$\varphi \in Cor(U,X)$$

$\boxed{\text{Замечание}}$ $i=0$: $\mathrm{Hom}_{Sh_{Nis}}(\mathbb{Z}[X],\mathcal{F}) = \mathrm{Hom}_{SNwT}(\mathbb{Z}_{tr}[X],\mathcal{F})$

$\mathcal{F}(X)$ Yoneda

пучок, представленный X в категории $SNwT$

$$\begin{tikzcd}
Sh_{Nis} \arrow[r, dashed, bend right, "tr"'] & SNwT \arrow[l, "Forget"'] \\
Sm/k \arrow[u] \arrow[ur] & \\
X \arrow[r, mapsto] & \mathbb{Z}_{tr}[X]
\end{tikzcd}$$

в $SNwT$ есть все пределы $\rightarrow$ есть tr левый сопряженный к забывающему

$\forall\, \mathcal{G} \in Sh_{Nis}$

$$\mathrm{Hom}_{Sh_{Nis}}(\mathcal{G}, \underset{\substack{\uparrow \\ Forget(\mathcal{F})}}{\mathcal{F}}) = \mathrm{Hom}_{SNwT}(tr(\mathcal{G}),\mathcal{F})$$

Докажем предложение:

$$H^i_{Nis}(X,\mathcal{F}) \overset{?}{=} \check{H}^i_{Nis}(X,\mathcal{F}) \overset{?}{=} \mathrm{Ext}^i_{SNoT}(\mathbb{Z}_{tr}[X],\mathcal{F})$$

$$\begin{tikzcd}
Sh_{Nis/X} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[rr, bend left, "\Gamma"] & PreSh/_X \arrow[r, "\Gamma^{pre}"] & \mathcal{A}b
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{F} \longmapsto \mathcal{F}(X)$

$\mathcal{G} \in PreSh/_X$, $\quad \mathcal{G} \longmapsto \Gamma(X,\mathcal{G}) = \mathcal{G}(X)$

$\Gamma = \Gamma^{pre} \circ i$

① $H^p_{Nis}(X,\mathcal{F}) = (R^p\Gamma)(\mathcal{F})$

② $\check{H}^p(X,\mathcal{F}) = (R^p\Gamma^{pre})(\mathcal{F})$

$\boxed{\text{Опр.}}$ $\mathcal{Y} \longrightarrow X$ — покрытие Нисневича

$\Rightarrow$

$$\mathcal{Y}\times_X\mathcal{Y}\times_X\mathcal{Y} \rightrightarrows \mathcal{Y}\times_X\mathcal{Y} \rightrightarrows \mathcal{Y} \in (\Delta^{op} \longrightarrow Sm/k)$$

$\mathcal{F} \in PreSh$

$$\begin{tikzcd}
H^p\Big(\mathcal{F}(\mathcal{Y}\times_X\mathcal{Y}\times_X\mathcal{Y}) \arrow[d] & \mathcal{F}(\mathcal{Y}\times_X\mathcal{Y}) \arrow[l] \arrow[d] & \mathcal{F}(\mathcal{Y})\Big) \arrow[l] \arrow[d] \\
H^p\Big(\mathcal{F}(\mathcal{Y}'\times_X\mathcal{Y}'\times_X\mathcal{Y}') \arrow[d] & \mathcal{F}(\mathcal{Y}'\times_X\mathcal{Y}') \arrow[l] \arrow[d] & \mathcal{F}(\mathcal{Y}')\Big) \arrow[l] \arrow[d] \\
H^p\Big(\varinjlim & \varinjlim \arrow[l] & \varinjlim \Big) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{Y} \arrow[dr] & \\
\mathcal{Y}' \arrow[ur] \arrow[rr] & & X
\end{tikzcd}$$

$\varinjlim H^p(\mathcal{Y}^\bullet) = H^p(\varinjlim) = \check{H}^p(X,\mathcal{F})$

Общая картинка

$$\underline{\underline{A}} \xrightarrow{i} \underline{\underline{B}} \xrightarrow{\gamma} \underline{\underline{C}}$$ — абелевы с дост. числом инъективных

Пусть $\forall$ инъективного $I \in \underline{\underline{A}}$ $\quad i(I) \in \underline{\underline{B}}$ ацикличен по отношению к γ

Тогда $\quad E_2^{pq} = R^p\gamma(R^q i(\mathcal{F})) \Rightarrow (R^{p+q}(\gamma\circ i))(\mathcal{F})$

— спектральная последовательность композиции
(см. Гротендик, О некоторых вопросах гомологической алгебры)

Пример. Пусть i — точный функтор. Тогда $R^q i(\mathcal{F}) = 0$ $\forall q>0$ $\forall \mathcal{F} \in \underline{\underline{A}}$

$$\Rightarrow R^p\gamma(i(\mathcal{F})) = (R^p(\gamma\circ i))(\mathcal{F})$$

$R^p\gamma(R^0 i(\mathcal{F})) = R^p\gamma(i(\mathcal{F}))$

Предположим, что i переводит инъективные в Γ^{pre}-ацикличные

$\rightsquigarrow \check{H}^p(X,\mathcal{F}) = H^p_{Nis}(X,\mathcal{F})$

Осталось проверить, что i переводит инъективные в Γ^{pre}-ацикличные.

$\boxed{\text{Лемма}}$ (Lemma 1.6, Voevodsky–Suslin, Bloch–Kato conjecture and motivic cohomology...)

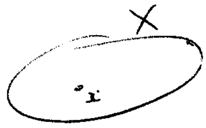
Пусть $Y \xrightarrow{f} X$ — покрытие Нисневича схемы X. Тогда следующая последовательность в $NSwT$ точна:

$$0 \leftarrow \mathbb{Z}_{tr}[X] \xleftarrow{f_*} \mathbb{Z}_{tr}[Y] \xleftarrow{p_{2,*}-p_{1,*}} \mathbb{Z}_{tr}[Y \times_X Y] \xleftarrow{p_{23,*}-p_{13,*}+p_{12,*}} \mathbb{Z}_{tr}[Y \times_X Y \times_X Y] \leftarrow \dots$$

т.е. $\longrightarrow$

квазиизоморфизм

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}_{tr}[Y] \arrow[d] & \mathbb{Z}_{tr}[Y\times_X Y] \arrow[l] \arrow[d] & \mathbb{Z}_{tr}[Y\times_X Y\times_X Y] \arrow[l] \arrow[d] \\ \mathbb{Z}_{tr}[X] & 0 \arrow[l] & 0 \arrow[l] \end{tikzcd}$$



$$\mathbb{Z}[X](U) \overset{def}{=} \mathbb{Z}[Map(U,X)]$$

$$0 \leftarrow \mathbb{Z}[X] \leftarrow \mathbb{Z}[Y] \leftarrow \mathbb{Z}[Y\times Y] \leftarrow \dots$$ — точна в Sh_{Nis}?

~~$0 \leftarrow \mathbb{Z}[X^h_x] \leftarrow \mathbb{Z}[Y^h] \leftarrow \mathbb{Z}[Y \times_X Y^h] \leftarrow$~~

Комплекс Чеха функториален по базе $\Rightarrow$ можно считать, что $X = X^h_x$ гензелево

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend right, "\exists s"'] & Y \arrow[l, "f"'] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[r, bend left, "h_0"] & Y\times_X Y \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[d] \arrow[r, bend left, "h_1"] & Y\times_X Y\times_X Y \arrow[l] \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[d] \\ & X \arrow[u, shift right, "s"'] & X \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[u, bend right, "(s,s)"'] & X \arrow[l] \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[u, bend right, "(s,s,s)"'] \end{tikzcd}$$

<u>Утв.</u> $\curvearrowright$ — тождественно, $\circlearrowleft$ — гомотопно тождественному:

$h_0 = (id, s\circ f)$ — гомотопии

$h_1 = (id, id, s\circ f)$

$$\begin{tikzcd} X & X \arrow[l] & X \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] & \dots \\ X \arrow[u] & Y \arrow[l] \arrow[u] & Y\times_X Y \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] & \dots \\ U^h \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, dashed, "\tilde\varphi"] \arrow[r, bend right, "\tilde s"'] & U^h\times_X Y \arrow[l] \arrow[u] & U^h\times_X (Y\times_X Y) \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[uu] & \dots \end{tikzcd}$$

$$\rightsquigarrow \quad X(U^h) \leftarrow Y(U^h) \leftleftarrows (Y\times_X Y)(U^h)$$

$$\varphi \in X(U^h) \leftarrow \underbrace{X(U^h) \leftleftarrows X(U^h)}_{} = \coprod_{\varphi\in X(U^h)} \Delta^0$$

① Это симплициальное множество

② $Y(U^h) \underset{\varphi}{\leftleftarrows} (Y\times_X Y)(U^h) \underset{\varphi}{\leftleftarrows} \dots$ — стягиваемо:

$$Y^\bullet(U^h) = \Big(Y(U^h) \leftleftarrows Y(U^h) \times_{X(U^h)} Y(U^h) \leftleftarrows \dots\Big)$$

$\exists s$, $X(U^h)$, h_0, h_1

ибо $\bullet \leftarrow Z \leftleftarrows Z\times Z \leftleftarrows Z\times Z\times Z$ стягиваемо

Пусть I — инъективный пучок. Возьмем $\mathrm{Hom}_{Sh_{Nis}}(\mathbb{Z}[Y^\bullet], I) = I(Y^\bullet)$

$$\begin{array}{ccc} I(Y^\bullet) = \mathrm{Hom}_{Sh_{Nis}}(\mathbb{Z}[Y^\bullet], I) \\ \uparrow \text{квази-изо} \\ I(X) = \mathrm{Hom}_{Sh_{Nis}}(\mathbb{Z}[X], I) \end{array}$$

квази-изо

инъект.

$$\rightsquigarrow \quad 0 \longrightarrow I(X) \xrightarrow{f^*} I(Y) \xrightarrow{p_2^* - p_1^*} I(Y \times_X Y) \longrightarrow \dots$$

— точная последовательность

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \check{H}^p(Y^\bullet/_X, I) = 0 & \text{при } p > 0 \\ \check{H}^0(Y^\bullet/_X, I) = I(X) \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \quad \check{H}^p(X, I) = \begin{cases} 0, & p > 0 \\ I(X), & p = 0 \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \quad \check{H}^p(X, \mathcal{F}) = H^p_{Nis}(X, \mathcal{F})$$

Теперь проверим, что $\check{H}^p(X, \mathcal{F}) = \mathrm{Ext}^p_{SNwT}(\mathbb{Z}_{tr}[X], \mathcal{F})$

Для этого докажем Лемму (1.6):

$\mathbb{Z}_{tr}[Y^\bullet](U^h) = \mathrm{Cor}(U^h, Y^\bullet)$ квази-изоморфизм комплексов абелевых групп?

$$\downarrow$$

$\mathbb{Z}_{tr}[X](U^h) = \mathrm{Cor}(U^h, X)$

$\boxed{\text{Лемма}}$ $\mathrm{Cor}(S, T_1 \times T_2) = \mathrm{Cor}(S, T_1) \otimes \mathrm{Cor}(S, T_2)$

Опр. $\mathrm{Mor}(S, T)$ = мн-во замкнутых неприводимых $Z \subset S \times T$: Z конечен + сюръективен над S

1. $\mathrm{Cor}(S, T) = \mathbb{Z}[\mathrm{Mor}(S, T)]$
2. $\mathrm{Mor}(S, T_1 \times T_2) \longrightarrow \mathrm{Mor}(S, T_1) \times \mathrm{Mor}(S, T_2)$

Лемма: Это биекция:

Cor — пучок в этальной топологии $\Rightarrow$ дост. д-ть для k^s

$$\mathrm{Cor}(pt, \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1) \longleftrightarrow \mathrm{Cor}(pt, \mathbb{A}^1) \otimes \mathrm{Cor}(pt, \mathbb{A}^1)$$

$\oplus\, \mathbb{Z} \cdot [z]$

$$\mathrm{Cor}(U^h, T_1 \times T_2) = \mathrm{Cor}(U^h, T_1) \otimes \mathrm{Cor}(U^h, T_2)$$