

Ориентированные теории коомологий

Обычные коомологии: $H^*(\dots) \longrightarrow \text{Gr Rings}$
 ↑ что здесь?
 Например, Tor

Более естественно: $H^*(X, Y; A)$, где $Y \subseteq X$ - пространство
 $A \in \mathcal{A}b$ - коэффициенты

Тогда $H^*(X, \emptyset; A) = H^*(X; A)$

$$H^*(X, Y) \longrightarrow H^*(X) \longrightarrow H^*(Y) \xrightarrow{\partial} H^{*-1}(X, Y)$$

$$H^*(X, Y; A) = H^*(\text{Cone}(Y \longrightarrow X); A)$$

$$Y \xhookrightarrow{i} X$$

$$\sim \text{Cone}(i) = Y \times \Delta^1 \sqcup_{i_0} X / Y \times \{1\}$$

Например, для $\text{Grm} \hookrightarrow A^1_{(\mathbb{R})}$ получить окружность
 $A^1_{\text{Grm}} \cong \text{Th}(A^1 \longrightarrow pt)$

Пусть k - поле

SmOr - категория пар (X, U) : X - гладкое многообразие над k
 $U \subseteq X$ - открытое

Теория коомологий на SmOr :

① $A: (\text{SmOr})^{\text{op}} \longrightarrow \mathcal{A}b$ + естественное преобразование $\partial: A(U) \longrightarrow A(X, U)$
 $A(\emptyset) = 0$ также, что $\parallel$
 $A(U, \emptyset)$

есть длинная точная последовательность для каждой пары $(X, U) \in \text{SmOr}$

$$A(X, U) \xrightarrow{i^*} A(X) \xrightarrow{j^*} A(U) \xrightarrow{\partial} A(X, U),$$

где $j: (U, \emptyset) \longrightarrow (X, \emptyset)$,

$i: (X, \emptyset) \longrightarrow (X, U)$

$$\begin{aligned} (X, U) &\in \text{SmOr} \\ Z &= X \setminus U \\ A_Z(X) &:= A(X, U) \end{aligned}$$

② $Z' \longrightarrow X'$ элементарный квадрат Нисневича

$$\begin{array}{ccc} Z' & \longrightarrow & X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & X \end{array}$$

$$\leadsto A_Z(X) \cong A_{Z'}(X')$$

(вырезание по Нисневичу)

- ③ $p: E \rightarrow X$ — A^n -расслоение (асфинное) |
 $\Rightarrow A(X) \xrightarrow{p^*} A(E)$ в какой-то топологии: Nis?
 (гомотопическая инвариантность)

$$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus \Delta$$

$$\text{сюр-} A^1 \downarrow \alpha_1$$

$$\mathbb{P}^1$$

— пример

Примеры

- ① $K_*(X, \mathcal{U}) := (K_*)_Z(X)$;
 ② $H^{*,*}(X, \mathcal{U})$ — мотивные коомологии;
 ③ $k = \mathbb{C}$; $A(X, \mathcal{U}) := H_{\text{sing}}(X(\mathbb{C}), \mathcal{U}(\mathbb{C}))$
 ④ $H_{\text{et}}^*(X, \mu_{\ell}^{\otimes i})$ ($\ell, \text{char } k = 1$)
 ⑤ $W^*(X, \mathcal{U}) = W_{X|\mathcal{U}}^*(X)$ — группы Витта
 $\otimes W^*(X, \mathcal{U})$ — не теория коомологии; там нет длинных точных
 ⑥ $KO_*^{[X]}(X, \mathcal{U})$ — эрмитова K-теория; W^* — ее фантор
 ⑦ $\pi^{*,*}(X, \mathcal{U})$ — стабильные гомотопические группы

Теорема (Морель)

$$\left(\bigoplus_n \pi^{2n,n}(pt) \right) [\eta^{-1}] = W^0(pt) [\eta, \eta^{-1}]$$

↑ стабильный элемент Хопфа
 (точнее, $\eta \in \pi^{-1,-1}(pt)$)

Ориентированная теория коомологии
 Дополнительные аксиомы

- ④ $\forall E \rightarrow X$ — векторное расслоение над гладким X
 зафиксирован элемент $th(E) \in A(E, E \setminus X)$ так, что

а) $u \cdot th(E): A(X) \rightarrow A(E, E \setminus X)$ класс Тома

б) $E \xrightarrow{f} E' \leadsto f^*(th(E')) = th(E)$ — изоморфизм

в) $f: X \rightarrow Y, E \rightarrow Y$

$$th(f^*E) = f^*(th(E))$$

г) $th(E \oplus E') = q_1^* th(E) \cup q_2^* th(E')$

$$\begin{array}{ccc} & E \oplus E' & \\ q_1 \swarrow & & \searrow q_2 \\ E & & E' \end{array}$$

кольцевая, т.е. $A: \text{SmOp}^{\text{op}} \rightarrow \text{Rings}$
 и задано $\cup: A_2(X) \times A_2(X) \rightarrow A_{2+2}(X)$
 функториальное, билинейное, ассоциативное и

если $1 \in A(\text{Spec } k)$
 которая задает $1 \in A(X)$
 $\forall X$

$$(X, \mathcal{U}) \in \text{SmOp}$$

$$A(X), A(\mathcal{U}), A(X, \mathcal{U})$$

левые $A(X)$ -модули:

$$(X, \emptyset) \rightarrow (X, \emptyset)$$

$$(Y, \emptyset) \rightarrow (X, \emptyset) \xrightarrow{U: A(X) \times A_{X|Y}(Y) \rightarrow A_{X|Y}(X)}$$

$$(X, \emptyset) \rightarrow (X, \emptyset)$$

так вот, в длинной точной последовательности
 везде стоят гомоморфизмы модулей

$$\partial(a \cup b) = a \partial(b) \quad \leftarrow \text{"правило Лейбница"}$$

$$a \in A(X)$$

$$b \in A(\mathcal{U})$$

① K_* - ориентированная

$$p^* e^{\nu} \rightarrow E$$

$$0 \rightarrow \Delta^n p^* E^v \rightarrow \dots$$

— точка над $E \setminus X$

$$\begin{array}{c} \text{H} \\ \vdots \\ \text{H} \end{array} \text{H}(\text{E})$$

$$th(E) \in CH_X^*(E)$$

1000-2020

- не ориентированные (даже не ориентируемые)

⑦ — всем не ориентируемые, т.е.

„симплектическая ориентация“:

Закрепить классы Тома "только" для

симплектических расслоений $(\text{пар } (E, \varphi: E \xrightarrow{\sim} E^*))$ + те же аксиомы

Ориентированная $\Rightarrow$ симплексически ориентированная: $\chi_h(E, \varphi) := \chi_h(E)$

⑤⑥ — симплектически ориентированные

„Специальная линейная ориентация“

- заданное т.ч. 2-е нр $(E, \lambda: \det E \simeq \mathcal{O}_X)$

т.е. расхождение с фиксированным тривиальным определителем

⑤, ⑥ — специально линейно ориентированные

(комплекс Кошуля - удовлетворяющий для SL-расслоения!)

$$\Lambda^k E^\vee = (\Lambda^k E)^\vee, \quad \Lambda^k E \otimes \Lambda^{n-k} E \longrightarrow \Lambda^n E \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_E$$

$$\sim \Lambda^{n-k} E \cong (\Lambda^k E)^\vee \sim \Lambda^{n-k} E \cong \Lambda^k E^\vee$$

→ нежно понасть в группу Визта

В обычной топологии:

$$H^n(X; A) \cong \text{Hom}_n(X, K(A, n))$$

$$K(A, n) \simeq \Omega K(A, n+1)$$

$$\text{Hom}(X \wedge S^1, K(A, n+1)) \simeq \text{Hom}(X, \Omega K(A, n+1))$$

Подставим $X \longmapsto K(A, n)$

$\rightarrow$ есть $\sigma_n: K(A, n) \wedge S^1 \longrightarrow K(A, n+1)$, соответствующий изоморфизму справа

Опр. Спектр — последовательность пунктированных топологических пространств $A_0, A_1, \dots$ и непрерывных отображений топологических пространств $A_i \wedge S^1 \longrightarrow A_{i+1}$

Примеры: $K(A, 0), K(A, 1), \dots$ — Ω -спектр

$$\sigma_n: K(A, n) \wedge S^1 \longrightarrow K(A, n+1)$$

(2) $S^0, S^1, \dots$ — спектр сфер

Опр. A — спектр

$$A^i(X) := \varinjlim_j \text{Hom}_n(X \wedge S^{j-i}, A_j)$$

— обобщенная теория коhomологий (т.е. удовлетворяет всем аксиомам, кроме аксиомы размерности)

Обратно, любая обобщенная теория коhomологий задается каким-то спектром (т. Брауна)

Теперь то же в алгебраической геометрии:

- мотивные пространства: симплициальные предучич на $\mathcal{S}_M/k$
- есть модельная структура на мотивных пространствах с точной $\rightarrow H_*(k)$ — гомотопическая категория

• T-спектры:

$A_0, A_1, A_2, \dots$; A_i — мотивные пространства

$$\text{и } \sigma_n: T \wedge A_n \longrightarrow A_{n+1}$$

$$\text{где } T = A^1 / \mathbb{G}_m$$

• A — T-спектр $\leadsto$ $A^{i,j}(X) = \varinjlim_k \text{Hom}_n(X \wedge T^{\wedge k-j}, A_k \wedge S^{i-2j})$

где S — симплициальная сфера

$$\begin{aligned} & S^1, T, \mathbb{G}_m \\ & \quad \text{окружности} \\ & T \cong (\mathbb{G}_m, 1) \wedge S^1 \\ & \quad \cong \mathbb{P}^1, \infty \\ & \quad \text{Cone}(\mathbb{G}_m \rightarrow A^1) \end{aligned}$$