И.А.Панин

Желаем построить тензорную триангулированную категорию Mot/k (позже это будет $DM^-(k)$)
и тензорный ~~триангулированный~~ функтор $Sm/k \xrightarrow{M} Mot/k$
такой, что $X \longmapsto M(X)$

(1)

если

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r] \arrow[d, "\pi'"'] & X' \arrow[d, "\pi"] & Z' \arrow[l, hook'] \arrow[d, "\wr"] \\ U \arrow[r, hook] & X & Z \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

(π′ этальный; π этальный)

— элементарный квадрат Нисневича (элементарный выделенный квадрат) elementary distinguished square

, то должен быть выделенный треугольник

$$M(U') \longrightarrow M(U) \oplus M(X') \longrightarrow M(X) \longrightarrow M(U')[1]$$

для обычного покрытия по Зарисскому $X = X_1 \cup X_2$,

$$\begin{tikzcd} X_1 \cap X_2 \arrow[r] \arrow[d] & X_2 \arrow[d, hook] \\ X_1 \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

— элементарный квадрат Нисневича

(2) $M(X \times \mathbb{A}^1) \xrightarrow{p_{X,*}} M(X)$ — изоморфизм в Mot/k

(3) Этальное вырезание:
для любого квадрата, как в (1),

$$\begin{array}{c} M(X')/M(U') \\ \big\downarrow \\ M(X)/M(U) \end{array}$$

— изоморфизм

наверное, (1)$\Longleftrightarrow$(3)

(4) тензорность: $M(X \times Y) = M(X) \otimes M(Y)$

Еще хочется, чтобы пара $(Mot/k,\ Sm/k \xrightarrow{M} Mot/k)$
была „универсальной"(?) среди всех пар с такими же свойствами

(5) Должны существовать объекты $\mathbb{Z}(n) \in Mot/k$ такие, что
$\forall$ гладкого X $\quad Hom_{Mot/k}(M(X), \mathbb{Z}(n)[2n]) = CH^n(X)$
В частности, $Hom_{Mot/k}(M(X), \mathbb{Z}(1)[2]) = CH^1(X) = Pic(X)$.

$$\begin{tikzcd}
 & SH(k) \arrow[d] \\
Sm/k \arrow[ur, "X \mapsto \Sigma^\infty_{\mathbb{P}^1}(X_+)"] \arrow[r, "M"] & DM^-(k)
\end{tikzcd}$$

$SH(k)$ — стабильная гомотопическая категория

$SH(k) \ni K(2n,n;\mathbb{Z})$

поэтому для универсальности нужно требовать что-то ещё;

пока что забудем про свойство универсальности

В топологии:

$$\begin{tikzcd}
 & SH \arrow[d] \\
CW \arrow[ur] \arrow[r, "C_*"] & D(Ab)
\end{tikzcd}$$

$X \longmapsto C_*(X)$

$Cor(k)$ — категория:

$Ob(Cor(k)) = Ob\ Sm/k$

$Mor_{Cor(k)}(Y,X) = Cor(Y,X)$

$= \bigoplus \mathbb{Z}[Z]$

$Z \hookrightarrow Y \times X$, $Z \to Y$

замкнутые неприводимые

конечный сюръективный

композиция: $Mor(Y,X) \times Mor(X,W) \longrightarrow Mor(Y,W)$

$(Z_1, Z_2) \longmapsto p_{YW,*}((Z_1 \times W) \cdot (Y \times Z_2))$

где $(Z_1 \times W) \cdot (Y \times Z_2)$ „правильное" пересечение вычисляется по Tor-формуле

$Y \times X \times W \xrightarrow{p_{YW}} Y \times W$

Проверяется (благодаря ассоциативности произведения циклов), что композиция ассоциативна.

$Cor(X,X) \ni id_X = [\Delta(X)]$.

Эти данные задают категорию Cor/k

$\boxed{\text{Замечание}}$ $Sm/k \overset{i}{\hookrightarrow} Cor/k$ — функтор

$X \longmapsto X$

$(Y \xrightarrow{f} X) : f \longmapsto (\Gamma(f) \subset Y \times X) \in Cor(Y,X)$

$\boxed{\text{Определение}}$ <u>Предпучок абелевых групп с трансферами</u> на Sm/k — это функтор $(Cor/_k)^{op} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{A}b$ такой, что

$$\mathcal{F}(X_1 \amalg X_2) \longrightarrow \mathcal{F}(X_1)\times\mathcal{F}(X_2) \text{ — изоморфизм,}$$

(и сумма морфизмов переходит в сумму?)

Иначе говоря — это аддитивный функтор

$$X_1 \oplus X_2 := X_1 \amalg X_2 \rightsquigarrow Cor/_k \text{ — аддитивная категория}$$

$PreSwT$ — категория предпучков с трансферами.

$\boxed{\text{Определение}}$ <u>Пучок Нисневича с трансферами</u> на Sm/k — это такой предпучок $\mathcal{F}: Cor/k^{op} \longrightarrow \mathcal{A}b$, с трансферами, что композиция $\mathcal{F}\circ i$ — это пучок Нисневича на Sm_{Nis}/k.

$$\begin{tikzcd}
Cor/k^{op} \arrow[r] & \mathcal{A}b \\
(Sm/_k)^{op} \arrow[u, "i"] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Категория пучков Нисневича с трансферами — $NSwT$

см. Voevodsky, Suslin, „Bloch-Kato conjecture and..."

$\boxed{\text{Определение}}$ Для $X \in Sm/_k$ положим

$$\mathbb{Z}_{tr}[X] := Cor(-, X) \in NSwT$$

т.е. это пучок Нисневича.

<u>Одна конструкция</u>: если $\mathcal{F} \in PreSwT$, образуем предпучки $C^{-n}(\mathcal{F})$: $C^{-n}(\mathcal{F})(U) := \mathcal{F}(\Delta^n \times U)$, это предпучки с трансферами.

$$\begin{tikzcd}
C^{-n}(\mathcal{F})(U) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\parallel"] & C^{-(n-1)}(\mathcal{F})(U) \arrow[d, phantom, "\parallel"] \\
\mathcal{F}(\Delta^n \times U) \arrow[r, "\partial^{-n}"] & \mathcal{F}(\Delta^{n-1}\times U)
\end{tikzcd}$$

Получаем комплекс предпучков с трансферами $C^*(\mathcal{F})$

$\boxed{\text{Лемма}}$ Предпучок $U \longmapsto H^i(C^*(\mathcal{F})(U))$ —

$$\parallel$$
$$h^i(C^*(\mathcal{F}))(U)$$

гомотопически инвариантен, то есть,

$$h^i(C^*(\mathcal{F}))(U) \xrightarrow[\sim]{p^*} h^i(C^*(\mathcal{F}))(\mathbb{A}^1\times U)$$

$\boxed{\text{Определение}}$ $M(X) = C^*(\mathbb{Z}_{tr}[X]) \in D^-(\underbrace{NSwT}_{\text{Лемма — абелева категория}})$

полная подкатегория в $D^-(NSwT)$, состоящая из $A^\bullet$ таких, что <u>пучки Нисневича</u> $h^i(A^\bullet)$ гомотопически инвариантны

$$\begin{tikzcd}
DM^-(k)_k \arrow[r, bend left, "i"] & D^-(NSwT) \arrow[l, dashed, "C^*"]
\end{tikzcd}$$

C^* — локализующий функтор — будет позже

C^* убивает объекты $\mathbb{Z}_{tr}[X\times\mathbb{A}^1]/\mathbb{Z}_{tr}[X\times 0]$

Теорема 1 Для любого гомотопически инвариантного предпучка $\mathcal{F} \in PreSwT$ ассоциированный пучок Нисневича $\mathcal{F}_{Nis}$ тоже гомотопически инвариантен

$\boxed{\text{Следствие}}$ $M(X) \in DM^-(k)$

$\boxed{\text{Определение}}$ Категория $DM^-(k)$ называется триангулированной категорией мотивов, и $M(X)$ называется мотивом X.

Если категория $DM^-(k)$ удовлетворяет свойствам категории $Mot/_k$

Еще одно пожелание:

(6) $\forall X \in Sm/k$
$\forall A^\bullet \in DM^-(k)$ $\quad H^i_{Nis}(X, A^\bullet) = Hom_{DM^-(k)}(M(X), A^\bullet[i])$

Частный случай: пусть $\mathcal{F} \in NSwT$ — гомотопически инвариантный.

$$\big(\dots \to \underset{(-2)}{0} \longrightarrow \underset{(-1)}{0} \longrightarrow \underset{(0)}{\mathcal{F}} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots\big) \in DM^-(k)$$

$$\begin{tikzcd}
H^i_{Nis}(X, \mathcal{F}) \arrow[d, "p^*", "\wr"'] & = & Hom_{DM^-(k)}(M(X), \mathcal{F}[i]) \arrow[d, "p^*", "\wr"'] \\
H^i_{Nis}(X \times \mathbb{A}^1, \mathcal{F}) & = & Hom_{DM^-(k)}(M(X \times \mathbb{A}^1), \mathcal{F}[i])
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
M(X) \\
M(X \times \mathbb{A}^1) \arrow[u, "M(p)", "\wr"']
\end{tikzcd}$$

Итак, если пожелание выполнено, то имеет место

$\boxed{\text{Теорема 2}}$ $\forall$ гомотопически инвариантного $\mathcal{F} \in NSwT$ $\forall i$.

$$H^i_{Nis}(X, \mathcal{F}) \xrightarrow[\sim]{p^*} H^i_{Nis}(X \times \mathbb{A}^1, \mathcal{F})$$

Можно предположить, что если мы докажем эту теорему 2 независимо, то докажется и пожелание (и многое другое)

Принцип (который будет реализован)

a) доказать теорему 2 саму по себе,

в) вывести из теоремы 2 тот факт, что $DM^-(k)$ — триангулированная подкатегория в $D^-(NSwT)$;

c) проверить все остальные свойства пары $(Sm/k,\ Sm/k \xrightarrow{M} DM^-(k))$, сформулированные в начале этого разговора.

$\boxed{\text{Лемма}}$ $\mathcal{F} \in PreSwT \Rightarrow \exists!$ структура предпучка с трансферами на $\mathcal{F}_{Nis}$ такая, что канонический морфизм $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}_{Nis}$ является морфизмом предпучков с трансферами

— пока поверим в эту Лемму

План доказательства Теоремы 1:

a) $\boxed{\text{Лемма}}$ $X \in Sm/k$, $\mathcal{F}$ — как в Теореме 1, $x \in X$ $\quad \mathrm{Spec}\,k(X) \xrightarrow{\eta}$

$\rightsquigarrow \mathcal{F}_x = \mathcal{F}(\mathcal{O}_{X,x}) \hookrightarrow \mathcal{F}_\eta = \mathcal{F}(K)$

$\boxed{\text{Замечание}}$ $X \longmapsto \dfrac{k[X]^*}{Nrd((k[X]\otimes H)^*)}$ — гомотопически инвариантный предпучок с трансферами

в) $\boxed{\text{Следствие}}$ $X \in Sm/k$, $\mathcal{F}$ как в Теореме 1 $\Rightarrow \forall\, U \underset{\text{откр.}}{\hookrightarrow} X$

$\mathcal{F}_{Nis}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_\eta$

$\boxed{\text{Следствие}}$ $\mathcal{F}_{Nis}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{Nis}(V)$

$\forall\, V \hookrightarrow U \hookrightarrow X$ откр.

на U есть
1) пост. пучок со слоем $\mathcal{F}_\eta$
2) $\mathcal{F}_{Nis}|_U$
3) $\mathcal{F}_{Nis}|_U \longrightarrow (\mathcal{F}_\eta)_{const}$

функтор глоб. сечений точен слева

c) $\forall X, \forall \mathcal{F}$ как в Теореме 1 рассмотрим

$\mathcal{F}\Big|_{(\mathbb{A}^1_{k(X)})_{Nis}}$ — предпучок.

малый сайт Нисневича

Плохо! правильную формулировку см. ниже

$\boxed{\text{Утверждение}}$ Это уже пучок Нисневича на малом сайте $(\mathbb{A}^1_{k(X)})_{Nis}$

(a)+(в)+(c) $\Longrightarrow$ Теорема 1. Покажем это:

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F}_{Nis}(X\times\mathbb{A}^1) \arrow[r, hook] \arrow[d, "i_0^*"] & \mathcal{F}_{Nis}(\mathbb{A}^1_{k(X)}) \arrow[d, "i^*_{0,k(X)}"] \arrow[dr, equal, "c"] & \\
\mathcal{F}_{Nis}(X) \arrow[ur, "p^*"] \arrow[r, "id"] & \mathcal{F}_{Nis}(X) \arrow[r, hook] & \mathcal{F}_{Nis}(k(X)) \arrow[d, equal] & \mathcal{F}(\mathbb{A}^1_{k(X)}) \arrow[dl, "\simeq"] \\
 & & \mathcal{F}(k(X)) &
\end{tikzcd}$$

инъективна по (в)

$X \xrightarrow{i_0} X\times\mathbb{A}^1$, $x \longmapsto (x,0)$

$\mathbb{A}^1\times X \hookleftarrow \mathbb{A}^1\times \mathrm{Spec}\,k(X) = \mathbb{A}^1_{k(X)}$

$\rightsquigarrow i_0^*$ — инъекция, $i_0^* p^* = id \Rightarrow i_0^*$ — сюръекция

$\rightsquigarrow i_0^*$ — изоморфизм $\Rightarrow$ Теорема 1.

$\simeq$ следует из гомотопической инвариантности $\mathcal{F}$

Правильная формулировка (c):

$\forall X\ \forall \mathcal{F}$ как в Теореме 1 $\forall \mathcal{U} \hookrightarrow \mathbb{A}^1_{k(x)}$

$$\mathcal{F}(\mathcal{U}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{Nis}(\mathcal{U})$$