

Гипотеза Гротендика—Серра о главных G-расположениях для редуктивной групповой схемы G/R

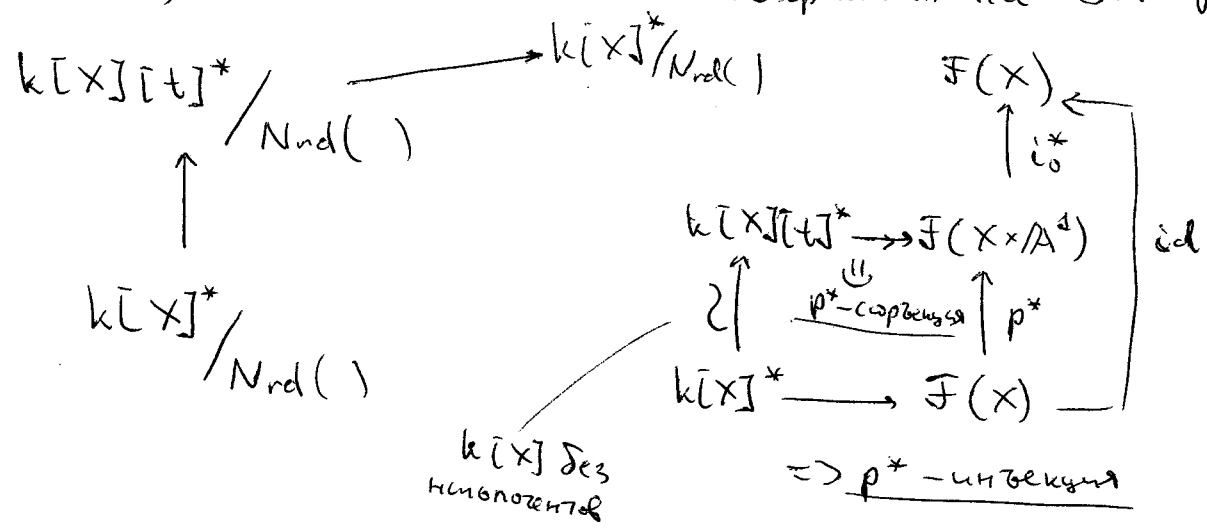
Теорема $\text{char}(k) \neq 2$, $a, b \in k^*$, H/k , где $H = (\frac{a, b}{k})$

$\forall X \in \text{Sm}/k \quad \forall x \in X$ замкнутая точка и для $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X, x}$
 отображение $\frac{\mathcal{O}^*}{\text{Nrd}((\mathcal{O} \otimes_k H)^*)} \longrightarrow \frac{k^*}{\text{Nrd}((k \otimes_k H)^*)}$ инъективно

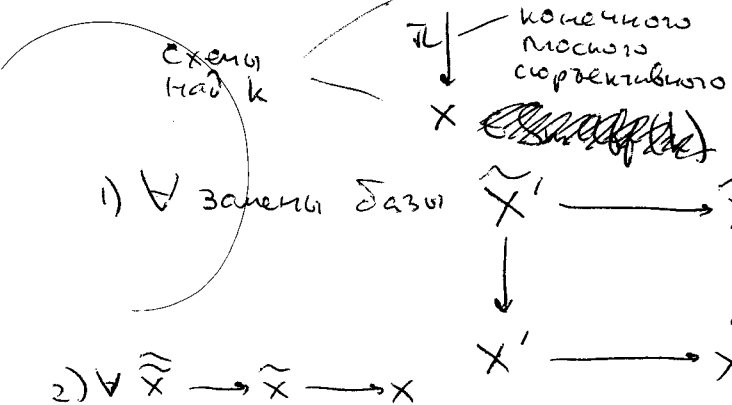
В прошлый раз мы доказали эту теорему в случае $\dim X = 1$.
 Осталось непроверенным утверждение (для ^{гладкого} аффинного X)

$X \longmapsto \frac{k[X]^*}{\text{Nrd}((k[X] \otimes_k H)^*)} = \mathcal{F}(X)$ — гомологически инвариантный предпучок с трансферами.

① Поймем, что $\mathcal{F}$ гомологически инвариантен на $\text{Sm aff}/k$:

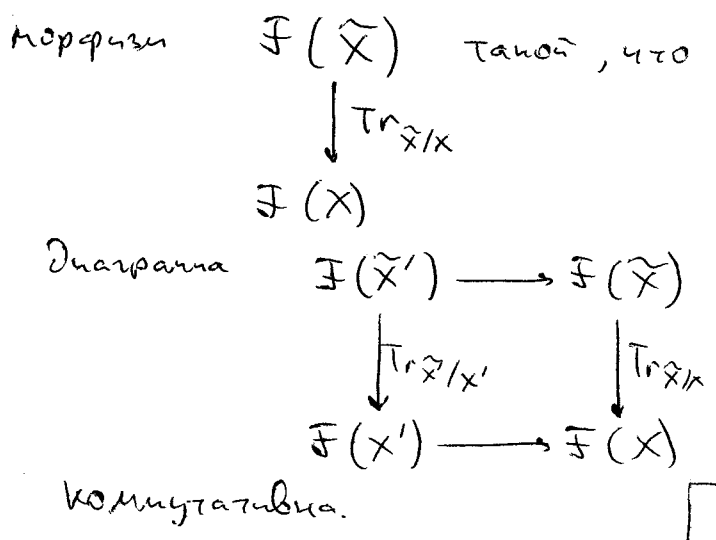


② В сущности, надо ~~привести~~ ~~свойство~~ построить $\forall \tilde{X}$



1) $\forall$ значения базиса $\tilde{X}' \longrightarrow \tilde{X}$
 $X' \longrightarrow X$
 2) $\forall \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X} \longrightarrow X$

$\text{Tr}_{\tilde{X}/X} \circ \text{Tr}_{\tilde{X}'/\tilde{X}} = \text{Tr}_{\tilde{X}'/X}$



Тогда для $Sch/k \xrightarrow{G} ab$ и $Tr_{\tilde{X}/X}: G(\tilde{X}) \rightarrow G(X)$
 все схемки над k

можно построить предпучок ~~трансферта~~ на $Mult/k$:
 на объектах G уже задан

$$X \xleftarrow{\pi} \tilde{X} \xrightarrow{f} Y$$

строит

$$G(X) \xleftarrow{Tr_{\tilde{X}/X}} G(\tilde{X}) \xleftarrow{f^*} G(Y)$$

Посмотрим на композицию:

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{W} \times \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{g}} & \tilde{X} & \xrightarrow{f} & Y \\ \tilde{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi & & \\ \tilde{W} & \xrightarrow{g} & X & & \end{array}$$

$$(W \xleftarrow{s} \tilde{W} \xrightarrow{g} X)$$

$$(X \xleftarrow{\pi} \tilde{X} \xrightarrow{f} Y)$$

$$\begin{array}{ccccc} G(\tilde{W} \times \tilde{X}) & \xleftarrow{\tilde{g}^*} & G(\tilde{X}) & \xleftarrow{f^*} & G(Y) \\ \downarrow Tr_{\tilde{W} \times \tilde{X}/X} & & \downarrow Tr_{\tilde{X}/X} & & \\ G(\tilde{W}) & \xleftarrow{g^*} & G(X) & & \\ \downarrow Tr_{\tilde{W}/W} & & & & \\ G(W) & & & & \end{array}$$

коммутативен

no (2)

$\leadsto G$ распространяем на морфизмы в $Mult/k$

Проверим свойство (1).

Перед этим нужно задать $Tr_{\tilde{X}/X}: F(\tilde{X}) \rightarrow F(X)$

$$k[\tilde{X}]^* \xrightarrow{N_{\tilde{X}/X}} k[X]^*$$

$k[\tilde{X}]$ — конечно порожденный проективный модуль над $k[X]$;

поэтому для $a \in k[\tilde{X}]$ есть оператор $k[\tilde{X}] \xrightarrow{\cdot a} k[\tilde{X}]$

$\leadsto$ есть $\det(\cdot a)$

при этом

$$k[\tilde{X}']^* \longleftarrow k[\tilde{X}]^*$$

— коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} k[\tilde{X}']^* & \longleftarrow & k[\tilde{X}]^* \\ \downarrow N_{\tilde{X}'/X'} & & \downarrow N_{\tilde{X}/X} \\ k[X']^* & \longleftarrow & k[X]^* \end{array}$$

Остается доказать, что если $a \in k[\tilde{X}]^*$ такое, что $a = \text{Nrd}(d)$ для $d \in (k[\tilde{X}] \otimes_k H)^*$, то $N_{\tilde{X}/X}(a) \in \text{Nrd}((k[X] \otimes_k H)^*)$ (норменный принцип)

$$\begin{array}{c} k[\tilde{X}][\sqrt{a}] \otimes_k H = M_2(k[\tilde{X}][\sqrt{a}]) \xleftarrow{i} k[\tilde{X}] \otimes_k H \\ \downarrow \text{Nrd} \quad \swarrow \det \quad \searrow \text{Nrd} \\ k[\tilde{X}][\sqrt{a}] \xleftarrow{M_2(N)} k[\tilde{X}] \xrightarrow{N} k[X] \xrightarrow{N(a)} N(a) = \text{Nrd}(M_2(N)(i(d))) \\ \uparrow \text{Nrd} \quad \swarrow \det \quad \searrow \text{Nrd} \\ k[X][\sqrt{a}] \otimes_k H = M_2(k[X][\sqrt{a}]) \end{array}$$

$\alpha \in \text{Nrd}(d)$
 α квадрат
 α замени базис
 $\Downarrow$
 коммутативен

$U \xrightarrow{\pi} X$
 étальное покрытие X
 $k[X][\sqrt{a}] := k[X][t] / (t^2 - a)$
 $k[X][\sqrt{a}] \otimes_k H$
 $\cong$
 $M_2(k[X][\sqrt{a}])$

нужно лишь проверить, что $M_2(N)(i(d)) \in k[X] \otimes_k H$
 $M_2(N)$ — Gal-инвариантно $\Rightarrow$ это верно.

Условие (2) проверяется тривиально (т.е. T получается из N , а норма транзитивна)

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\mu} & G_{m,k} \\ \downarrow \alpha & \xrightarrow{\quad} & \downarrow \alpha \\ G(\ell) & \xrightarrow{\quad} & \ell^* \\ \downarrow & & \downarrow N_{\ell/k} \\ G(k) & \xrightarrow{\quad} & k^* \\ \downarrow \beta & \xrightarrow{\quad} & \downarrow N_{k,\ell(k)} \\ ? & \xrightarrow{\quad} & N_{\ell,\ell(k)} \end{array}$$

Взят $a \in \ell^*$, $a = \mu(d)$
 Верно ли, что $N_{\ell,k}(a)$ приходит из $\beta \in G(k)$?
 Если d — R-тривиален (по Маттину), то верно
 В частности, это так, если G — рациональное
 многообразие.

Если норменный принцип верен (для локальных полей), то

$$\mathcal{O}^* / \mu(G(\mathcal{O})) \longrightarrow K^* / \mu(G(K))$$

Например, неизвестно:

$$\mathbb{O}^* / S_n(G\mathbb{O}^+(A, \sigma) \otimes \mathbb{O}) \xrightarrow{\quad} \mathbb{K}^* / S_n(G\mathbb{O}^+(A_K, \sigma_K))$$

(для лок. колец)

Есть другой подход к Гротендику — Серру:

k — бесконечное поле

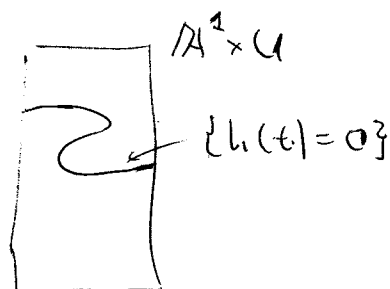
① $U = \text{Spec}(\mathbb{O})$, G — главное G -расстояние над U

построить G_t над $A^1 \times U$.

и полином $h(t) \in \mathbb{O}[t]$ со свойствами:
 унитарный

а) $G_t|_{\mathbb{O} \times U} \cong G$

б) $G_t|_{(A^1 \times U)_{h(t)=0}}$ тривиально



② (сделано для односвязной G , Ставрова + Вавилов + Пантин)
 (или — ①)

$G \supset G_{m,0}$ — т.е. изотропия

$\Rightarrow$ любое G_t , удовлетворяющее (б), тривиально

Теперь G_t тривиально на $\mathbb{O} \times U \leadsto$ наше расстояние тривиально

