14.05.2013

С. Ягунов

Лемма 7 $\forall f: X \longrightarrow Y$ в $\mathcal{C}$ существует морфизм $\tilde{f}: QX \longrightarrow QY$ такой, что

$$\begin{tikzcd} QX \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p_X"', "\wr"] & QY \arrow[d, "p_Y", "\wr"'] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

① $\tilde{f}$ определяется по f с точностью до левой (правой) гомотопии.

② $\tilde{f}$ — слабая эквивалентность $\Leftrightarrow$ f — слабая эквивалентность

Док-во Конструкция:

$$\begin{tikzcd} \varnothing \arrow[r] \arrow[d, hook] & QY \arrow[d, "\wr\, p_Y"] \\ QX \arrow[r, "f p_X"'] \arrow[ur, dashed, "\exists \tilde{f}"] & Y \end{tikzcd}$$

По лемме 3 (для QX и Y) всё определено с точностью до левой гомотопии

Если A — корасслоенный, то из $f \overset{l}{\sim} g$ следует $f \overset{R}{\sim} g$ $\Rightarrow$ и с точностью до правой гомотопии

(2) — из аксиомы 2-из-3 □

Замечание Определим функтор $Q: \mathcal{C} \longrightarrow \pi\mathcal{C}_c$

$$X \longmapsto QX$$

$$\left(X \xrightarrow{f} Y\right) \longmapsto [\tilde{f}] \in \pi^R(QX, QY)$$

Двойственное утверждение: для $f: X \longrightarrow Y$ существует $\bar{f}: RX \longrightarrow RY$ т.ч.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\wr"'] & Y \arrow[d, "\wr"] \\ RX \arrow[r] & RY \end{tikzcd}$$

с аналогичными свойствами,

и $\exists R: \mathcal{C} \longrightarrow \pi\mathcal{C}_f$.

Лемма 8 ① $Q: \mathcal{C} \longrightarrow \pi\mathcal{C}_c$. Ограничение Q на $\mathcal{C}$ индуцирует $\rightsquigarrow Q': \pi\mathcal{C}_f \longrightarrow \pi\mathcal{C}_{cf}$ ② Аналогично, по $R: \mathcal{C} \longrightarrow \pi\mathcal{C}_f$ строится $R': \pi\mathcal{C}_c \longrightarrow \pi\mathcal{C}_{cf}$.

Док-во (2) $X, Y \in Ob\, \mathcal{C}_c$; докажем, что для $f, g : X \longrightarrow Y$ таких, что $\bar{f} = \bar{g}$ в $\pi\mathcal{C}_c$ выполнено $Rf = Rg$.

Достаточно рассмотреть случай $f \overset{R}{\sim} g$, а это Лемма 7' □

Определение Гомотопическая категория $Ho(\mathcal{C})$ модельной категории $\mathcal{C}$ — это категория с $Ob\, Ho(\mathcal{C}) = Ob\, \mathcal{C}$ и

$$Hom_{Ho(\mathcal{C})}(X, Y) = Hom_{\pi\mathcal{C}_{cf}}(R'QX, R'QY) = \pi(RQX, RQY)$$

Существует функтор $\gamma : \mathcal{C} \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$, тождественный на объектах и посылающий $f : X \longrightarrow Y$ в $R'Q(f) : R'Q(X) \longrightarrow R'Q(Y)$.

Утв. 9 (1) Пусть f — морфизм в $\mathcal{C}$. Тогда $\gamma(f)$ является изоморфизмом в $Ho(\mathcal{C}) \Leftrightarrow f$ — слабая эквивалентность.

(2) Морфизмы в $Ho(\mathcal{C})$ порождены композициями $\gamma(f)$, $f \in Mor(\mathcal{C})$, и $\gamma(g)^{-1}$, g — слабая эквивалентность в $\mathcal{C}$.

$$X \longrightarrow \xleftarrow{\sim} \longrightarrow \xleftarrow{\sim} \longrightarrow \xleftarrow{\sim} \longrightarrow Y$$

Док-во (1) $f : X \xrightarrow{\sim} Y \Leftrightarrow R'Q(f) : RQ(X) \xrightarrow{\sim} RQ(Y)$, $\exists f'$

f' — обратный к $R'Q(f)$ в $\pi\mathcal{C}_{cf}$

(2) $X \xleftarrow[\sim]{p_X} QX \xrightarrow[\sim]{i_{QX}} RQX$

для $X, Y \in Ob\, \mathcal{C}$ $\quad Hom_{\mathcal{C}}(RQ(X), RQ(Y)) \longrightarrow Hom_{Ho(\mathcal{C})}(R'Q(X), R'Q(Y))$

$f : X \longrightarrow Y$ в $Ho(\mathcal{C})$ может быть записан в виде

$$X \simeq RQ(X) \longrightarrow RQ(Y) \simeq Y$$ □

Следствие $F, G : Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{D}$, $t : F\gamma \longrightarrow G\gamma$ — естественное преобразование функторов. Тогда t индуцирует естественное преобразование $F \longrightarrow G$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, bend left=15, "F\circ\gamma"] \arrow[rr, bend right=5, "G\circ\gamma"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow t"] \arrow[d, "\gamma"'] & & \mathcal{D} \\
Ho(\mathcal{C}) \arrow[urr, bend left=10, "F"] \arrow[urr, bend right=10, "G"'] \arrow[urr, phantom, "\Downarrow t"] & &
\end{tikzcd}$$

<u>Док-во</u>

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, leftarrow] \arrow[rrrrr, bend left] \arrow[d, "t"'] & \cdot \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \cdot \arrow[r, leftarrow] \arrow[d, dashed] & \cdot \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \cdot \arrow[r, leftarrow] \arrow[d, dashed] & F(Y) \arrow[d, "t"] \\
G(X) \arrow[r, leftarrow] \arrow[rrrrr, bend right] & \cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r, leftarrow] & \cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r, leftarrow] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

коммутативны из естественности $t: F\circ\gamma \Rightarrow G\circ\gamma$

□

$\boxed{\text{Лемма } 10}$ $\mathcal{C}$ — замкнутая модельная категория, $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ переводит слабые эквивалентности в изоморфизмы. Тогда если $f \overset{l}{\sim} g: A \longrightarrow X$ (соотв. $f \overset{R}{\sim} g: A \longrightarrow X$), то $F(f) \cong F(g)$ в $\mathcal{D}$.

<u>Док-во</u> $f \overset{l}{\sim} g \rightsquigarrow H: A\wedge I \longrightarrow X$

$$A \amalg A \xrightarrow{i_0, i_1} A\wedge I \underset{\sim}{\xrightarrow{w}} A \qquad w i_0 = w i_1$$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{F(w)}F(i_0) = \cancel{F(w)}F(i_1)$$

$\rightsquigarrow F(f) = F(H)F(i_0) = F(H)F(i_1) = F(g)$ □

$\boxed{\text{Утв.}}$ A — корасслоенный, X — расслоенный

$\Rightarrow \gamma: Hom_{\mathcal{C}}(A, X) \longrightarrow Hom_{Ho(\mathcal{C})}(A, X)$

сюръективно и индуцирует биекцию между

$\pi(A, X)$ и $Hom_{Ho(\mathcal{C})}(A, X)$

<u>Док-во.</u> Есть отображение $\pi(A, X) \xrightarrow{\gamma} Hom_{Ho(\mathcal{C})}(A, X)$

$$\begin{tikzcd}
\pi(RA, QX) \arrow[r, "\sim", "\text{п.3 и 3'}"'] \arrow[d, "\wr"] & \pi(A, X) \arrow[d, "\gamma"] \\
Hom_{Ho(\mathcal{C})}(RA, QX) \arrow[r, "\sim", "\text{п.8}"'] & Hom_{Ho(\mathcal{C})}(A, X)
\end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow \gamma$ — биекция

$\boxed{\S}$ Локализация

Определение $\mathcal{C}$ — категория, W — класс морфизмов в $\mathcal{C}$.
$F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ называется <u>локализацией</u> $\mathcal{C}$ в W, если

① $F(f)$ — изоморфизм $\forall f \in W$

② $\forall G: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}'$ такого, что $G(f)$ — изоморфизм $\forall f \in W$
$\exists!\ G': \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ т.ч.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "G"'] & \mathcal{D} \arrow[d, dashed, "\exists! G'"] \\
& \mathcal{D}'
\end{tikzcd}$$

Обозначение: $\mathcal{D} = \mathcal{C}[W^{-1}]$

Теорема Пусть $\mathcal{C}$ — замкнутая модельная категория, W — слабые эквивалентности в $\mathcal{C}$. Тогда функтор $\gamma: \mathcal{C} \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$ есть локализация $\mathcal{C}$ в W.

<u>Док-во</u>: Проверим два свойства: первое — Утв. 9

Второе:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "G"] \arrow[d, "\gamma"'] & \mathcal{D} \\
Ho(\mathcal{C}) \arrow[ur, dashed, "G'"']
\end{tikzcd} \qquad G(W) \subseteq Isom$$

Понятно, как G' действует на объектах. На морфизмах:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \\
QX \arrow[u, "\sim"] \arrow[d, "\sim"'] & QY \arrow[u, "\sim"'] \arrow[d, "\sim"] \\
RQX \arrow[r] & RQY
\end{tikzcd}$$

Глава   Примеры модельных категорий

I   Top: ① W — слабые гомотоп. экв-сти

② C — ретракты отображений $X \longrightarrow Y'$, где Y' получены присоединением клеток

③ F — расслоения Серра

II R — кольцо с 1 Mod_R — категория левых модулей над R

$$Ch_R: \quad M_0 \xleftarrow{\partial} M_1 \xleftarrow{\partial} M_2 \xleftarrow{\partial} \dots, \quad \partial^2 = 0$$

$$Z_k(M) = \begin{cases} Ker(\partial: M_k \longrightarrow M_{k-1}), & k>0 \\ M_0, & k=0 \end{cases}$$

$$B_k(M) = Im(\partial: M_{k+1} \longrightarrow M_k)$$

$$H_k(M) = Z_k / B_k$$

$H_k: Ch_R \longrightarrow Mod_R$;

① W: $f: M_\bullet \longrightarrow N_\bullet$ т.ч. $H_k M_\bullet \xrightarrow{\sim} H_k N_\bullet$ $(k \geq 0)$ (f — квазиизоморфизм)

② C: $0 \longrightarrow M_\bullet \hookrightarrow N_\bullet \longrightarrow P_\bullet \longrightarrow 0$, если $P_\bullet$ состоит из проективных модулей.

③ F: $M_k \longrightarrow N_k \longrightarrow 0$ — эпи во всех $k>0$

Теорема Эта структура задает модельную категорию на Ch_R

Предложение $\forall\, A, B \in Ob\,(Mod_R)$

$$Hom_{Ho(C)}(K(A,n), K(B,m)) \cong Ext^{n-m}(A,B)$$

$K(A,n) \in Ch_R$ (модуль A в разм. n, 0 в остальных) аналог пр-ва Эйленберга–Маклейна

Если в (2) заменить $P_\bullet$ на комплексы свободных модулей, то получим модельную категорию, не являющуюся замкнутой.