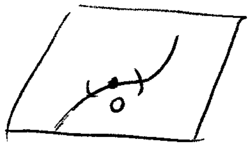
24.09.2012

И. Панин

X — многообразие над $\mathbb{C}=k$, т.е.

$$f\in\mathbb{C}[t_1,\dots,t_n]$$
$$f(0)=0$$
$$\underset{\substack{\cup\\ 0}}{X}=\{f=0\}$$



Посмотрим на кольцо $\mathcal{O}_{X,x}$

$$\mathcal{O}_{X,x}\hookrightarrow k(X)$$

$u, a_1,\dots,a_k\in\mathcal{O}^{\times}_{X,x}$ ← переменные $X_i$

$$(*)\qquad \sum_{i=1}^{k} a_i X_i^2 = u$$

Гипотеза Colliot-Thélène (~1982)

$\boxed{\text{Задача}}$: Пусть (*) имеет решение в $k(X)$, т.е. найдутся $\frac{f_i}{g_i}\in k(X)$: $\sum a_i\left(\frac{f_i}{g_i}\right)^2=u$

Доказать, что найдутся $h_i\in\mathcal{O}_{X,x}$: $\sum_{i=1}^{k} a_i h_i^2=u$

$Y\hookrightarrow\mathbb{C}^n$ алгебраическое множество, если $\exists F_1,\dots,F_N: Y=\{F_1=0\}\cap\dots\cap\{F_N=0\}$

Опишем $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}=\left\{\frac{F}{G}\,\middle|\, G(0)\neq 0\right\}$

$$\mathbb{C}(\mathbb{C}^n)=\left\{\frac{F}{G}\,\middle|\, G\neq 0\right\}$$

---

Гипотеза Колио-Телена:

Пусть $\mathcal{O}$ — локальное регулярное кольцо, $\dim(\mathcal{O})=n$

(регулярное: $\exists f_1,\dots,f_n\in\mathfrak{m}: f_1\mathcal{O}+\dots+f_n\mathcal{O}=\mathcal{O}$)

Пусть $K$ — поле частных кольца $\mathcal{O}$: $K=\{\frac{f}{g}\mid g\neq 0\}$

$$a_1,\dots,a_s,u\in\mathcal{O}^*$$

Пусть уравнение

$$\sum a_i X_i^2 = u$$

имеет решение в $K$; доказать, что оно имеет решение в $\mathcal{O}$

---

$x\in X\subset\mathbb{A}^n_{\mathbb{F}_q}$, $q=p^n$, $\dim X=d$

Пусть $\mathcal{O}_{X,x}$ регулярно ($X$ гладко в $x$)

$a_1,\dots,a_s,u\in\mathcal{O}^{\times}_{X,x}$, тот же вопрос

Частный случай: $X=\mathbb{A}^n_{\mathbb{F}_q}$

$$\mathcal{O}=\mathcal{O}_{X,0}=\left\{\frac{F}{G}\,\middle|\, F,G\in\mathbb{F}_q[t_1,\dots,t_n],\ G(0)\neq 0\right\}$$
$$\mathcal{O}\subseteq K=\left\{\frac{F}{G}\,\middle|\, F,G\in\mathbb{F}_q[t_1,\dots,t_n],\ G\neq 0\right\}$$

$a_1,\dots,a_s,u \in \mathcal{O}^\times$

$a_i = \frac{A_i}{B_i} \in \mathcal{O} \Leftrightarrow B_i(0)\neq 0$

$a_i \in \mathcal{O}^\times$, если $A_i(0)\neq 0$

+ тот же вопрос

$\mathbb{R}[t]$

$S \in \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$

$\{\pm i\} \in \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$

$\mathbb{C} = \mathbb{R}[t]/(t^2+1)$

$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$

$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[t]/(t-5)) = 1$

Вообще, $m \in \mathbb{A}^1_F$

$\rightsquigarrow \deg(\text{точки } m) := \dim_F\left(F[t]/m\right)$

$\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_p}$ содержит точки любой степени:
в $\mathbb{F}_p[t]$ найдется неприводимый многочлен любой степени.

На следующем занятии будет сформулирована еще одна задача

$$\begin{array}{lcl} \dim_F E & E & \{q=0\}\neq\varnothing \text{ над } E \\ \text{нечетна} & | & \Downarrow \\ & F & \{q=0\}\neq\varnothing \text{ над } F \end{array}$$

теорема Шпрингера: $\{q=0\}\neq\varnothing$ над $F$

## $\mathbb{A}^1$-гомотопическая наука Воеводского и Мореля

1. Это „правильная" теория гомотопий для алгебраических многообразий над произвольным полем (в частности над $\mathbb{C}$)

$Ho^{\mathbb{A}^1}(k)$ — гомотопическая категория

$$\begin{array}{ccc} Sm/k & \xrightarrow{\Pi} & Ho^{\mathbb{A}^1}(k) \\ X & \longmapsto & \mathbb{A}^1\text{-гомотопический тип } X \\ f\downarrow & & \downarrow [f] \text{ — гомотопический тип} \\ Y & \longmapsto & Y \\ \mathrm{Reg}^{\text{Мор}}(X,Y) & \longrightarrow & [X,Y]_{\mathbb{A}^1} \end{array}$$

2. Если $k=\mathbb{C}$, то

$$\begin{array}{ccccc} & \Pi' \nearrow & Ho^{\mathbb{A}^1}(\mathbb{C}) & \xrightarrow{t_{\mathbb{C}}} & H \\ Spc & & \uparrow \Pi & & \uparrow \\ | & \hookleftarrow & Sm/\mathbb{C} & \longrightarrow & CW\text{-комплексы} \\ \text{пространства} & & & & \end{array}$$

$H$ — гомотопическая категория клеточных пространств

3. В топологии

$$[X, Gr], \quad Gr = \bigcup Gr(n, \mathbb{C}^{2n})$$

$$[X, Gr] = K_0^{top}(X)$$

$$[S^n(X), Gr] = K_n^{top}(X)$$

почти определение

В алгебре

не вполне многообразие

$$[X, Gr_k]_{\mathbb{A}^1} = K_0^{alg}(X)$$

$$[S^n(X), Gr_k]_{\mathbb{A}^1} = K_n^{alg}(X)$$

Теорема

3'.

$$\mathbb{C}P^\infty = K(\mathbb{Z}, 2)$$

с точностью до гомотоп. эквив-сти

$$\pi_1 = 0, \quad \pi_2 = \mathbb{Z}, \quad \pi_i = 0 \ (i > 2)$$

$$Sm/_{\mathbb{C}} \ni X \rightsquigarrow [X, \mathbb{C}P^\infty] = [X, K(\mathbb{Z},2)] = H^2(X, \mathbb{Z})$$

алгебраическое

$$[X, \mathbb{C}P^\infty]_{\mathbb{A}^1} = Pic(X) = CH^1(X)$$

$$\mathcal{L} \mapsto c_1(\mathcal{L}), \quad Pic(X) \xrightarrow{c_1} H^2(X, \mathbb{Z})$$

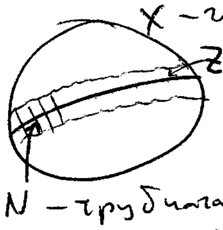
$$f \longmapsto \mathcal{L}(f):$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L} = f^*(Hopf) & \longrightarrow & Hopf = \mathcal{O}(-1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}P^\infty \end{array}$$

4. Пожелания к функтору $\Pi^{\mathbb{A}^1}$

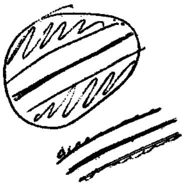
$$\Pi : Sm/_{\mathbb{C}} \longrightarrow Ho^{\mathbb{A}^1}(\mathbb{C})$$

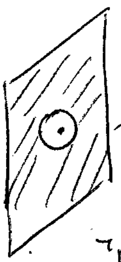
а) хочется




(= нормальное расслоение

$$\frac{X}{X-Z} \longleftrightarrow \frac{N}{N-Z}$$





$$\rightsquigarrow S^2 = \bar{D}/\partial S = \bar{D}/S_1$$

пр-во Тома тривиального расслоения над точкой

В алгебре:

$$\frac{X}{X-Z} \sim \frac{N}{N-Z}$$

нормальное расслоение к Z

$\mathbb{A}^1$-гомотоп. эквивалентно

б)

$$\begin{tikzcd}
 & Ho^{\mathbb{A}^1}(\mathbb{C}) \arrow[rr] & & H = Ho(CW) & \\
Spc \arrow[ur] \arrow[r, leftrightarrow] & Sm/\mathbb{C} \arrow[u] \arrow[r] & C^\infty\text{-многообразия} \arrow[r, leftrightarrow] & CW\text{-комплексы} \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ * \arrow[r] & X/Y \end{tikzcd}}$$ или даже $$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ * \arrow[r] & Cone(f) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} B' \times_B E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ B' \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

Здесь

① есть все индуктивные пределы

② есть все проективные пределы

③ есть корассл. $X \rightarrowtail Y$ (пара Борсука)

• есть расслоения (Серра) Гуревича? $E \xrightarrow{p} B$

$$\left(\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "г.экв"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\exists"] & B \end{tikzcd}\right)$$

④ есть гомотопические экв-сти (слабые эквивалентности)

Мораль: теперь уже (в наши дни) по общей науке (модельные категории) гомотопической алгебры $CW \longrightarrow Ho(CW) := CW[W^{-1}]$

т.е. если $\mathcal{C}$ — категория с классами $\underset{\text{корасслоения}}{Cof}$, $\underset{\text{расслоения}}{Fib}$, $\underset{\text{слабые экв-сти}}{W}$

и имеются все индуктивные пределы и все проективные пределы,

то $Ho(\mathcal{C}) \overset{def}{=\!=} \mathcal{C}[W^{-1}]$ — гомотопическая категория

$$X \overset{\sim}{\leftarrow} X_1 \rightarrow Y_1 \overset{\sim}{\leftarrow} X_2 \rightarrow Y_2 \quad \cdots \quad \rightarrow Y$$

Вообще, если есть $Cof, Fib, W \subset Mor(\mathcal{C})$, то $\mathcal{C}[W^{-1}]$ описывается так:

$$X, Y \in Cof(\mathcal{C}) \cap Fib(\mathcal{C}) \rightsquigarrow [X, Y] = Mor_{\mathcal{C}}(X, Y)/\sim$$

$\varnothing \to X$ — корасслоение
$X \to \bullet$ — рассл.

(например, если $X, Y$ — клеточные комплексы)

---

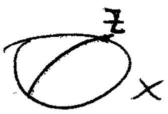
Так вот, мы хотим иметь категорию $Spc$ с теми же свойствами

1. Например, для $X \supset U$ должно быть

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] & U \arrow[l, phantom, "\supset"] \arrow[d] \\ X/U & * \arrow[l] \end{tikzcd}$$ — пространство

2. $\mathbb{C}P^\infty = \bigcup \mathbb{C}P^n$ — пространство
$= \varinjlim \mathbb{C}P^n$

3. $[X, Gr_k]_{\mathbb{A}^1} = K_0^{alg}(X)$

4. $\dfrac{X}{X - Z} \simeq \dfrac{N}{N - Z}$ для 

Идея построения Spc:

$$\forall \mathcal{C} \quad \mathcal{C} \hookrightarrow \mathrm{Funct}(\mathcal{C}^{op}, Sets) = Spc^{1\text{-}st}$$

$$X \longmapsto h^X : \quad h^X(Y) = Mor_{\mathcal{C}}(Y, X)$$

$$Mor_{\mathcal{C}}(X, X') = Mor_{\mathrm{Funct}}(h^X, h^{X'})$$

Хочется рассмотреть $Spc \subset Spc^{1\text{-}st}$ для $\mathcal{C} = Sm/\mathbb{C}$

категория пучков: – в какой-то топологии (Нисневича)

$Sh(Sm/_{\mathbb{C}}, Sets) = Spc$ – полная подкатегория в $\mathrm{Funct}(\mathcal{C}^{op}, Sets)$

$h^X$ – уже пучок, поэтому $h^X \in Spc$

<u>Лемма</u> $\mathcal{F} : (Sm/_{\mathbb{C}})^{op} \longrightarrow Sets$ – пучок

тогда и только тогда, когда $\forall$ квадрата

$$\begin{tikzcd} U \cap V \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & V \arrow[d, hook] \\ U \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

т.ч. $U$ и $V$ покрывают $X$

диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U \cap V) & \mathcal{F}(V) \arrow[l] \\ \mathcal{F}(U) \arrow[u] & \mathcal{F}(X) \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

декартова

<u>Замечание</u> Эта лемма верна для топологии Зарисского, Нисневича и сильной топологии.

Почему мы хотим работать с пучками, а не с предпучками?

$$\begin{tikzcd} U \cap V \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & V \arrow[d, hook] \arrow[ddr, bend left] & \\ U \arrow[r, hook] \arrow[drr, bend right] & X \arrow[dr, dashed] & \\ & & Y \end{tikzcd}$$

$X$ – копредел

Представимые предпучки:

$$\begin{tikzcd} h^{U \cap V} \arrow[r] \arrow[d] & h^V \arrow[d] \\ h^U \arrow[r] & h^X \end{tikzcd}$$

на уровне предпучков $h^X$ – не копредел!

а в категории пучков – копредел.

<u>Финал:</u> $Spc$ = категория пучков множеств на $Sm/\mathbb{C}$