Математический анализ для алгебраистов*

Александр Лузгарев

Содержание

---
*Конспект лекций спецкурса осени 2012 г.; предварительная версия.

Литература:

- S. Ramanan, *Global Calculus*, Graduate Studies in Mathematics, AMS, 2005.
- J. Baez, P. Muniain, *Gauge Fields, Knots, and Gravity*, Series on Knots and Everything, World Scientific Pub Co Inc, 1994.

1 Предел и непрерывность

1.1 Фильтры

Определение 1.1.1. **Фильтром** в множестве X называется множество $\mathcal{F}$ его подмножеств, обладающее следующими свойствами:

- Всякое подмножество X, содержащее множество из $\mathcal{F}$, также принадлежит $\mathcal{F}$.
- Всякое пересечение конечного семейства множеств из $\mathcal{F}$ принадлежит $\mathcal{F}$.
- Пустое множество не принадлежит $\mathcal{F}$.

Легко видеть, что второе условие равносильно тому, что $X \in \mathcal{F}$ и пересечение любых двух множеств из $\mathcal{F}$ лежит в $\mathcal{F}$.

Примеры 1.1.2.

1. Если $X \neq \emptyset$, то множество $\{X\}$ является фильтром в X. Вообще, множество всех подмножеств X, содержащих непустое $A \subseteq X$, является фильтром в X.
2. Если X — топологическое пространство, то множество всех окрестностей непустого множества $A \subseteq X$ (например, точки), является фильтром в X.
3. Если X — бесконечное множество, то дополнения ко всем его конечным подмножествам образуют фильтр. Такой фильтр на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ называется **фильтром Фреше**.

Определение 1.1.3. Пусть $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ — два фильтра на X. Говорят, что $\mathcal{F}'$ мажорирует $\mathcal{F}$, если $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$.

Пусть $\mathcal{B}$ — некоторое подмножество 2^X. Рассмотрим множество всех подмножеств X, содержащих какое-либо множество из $\mathcal{B}$. Это множество является фильтром тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}$ обладает следующими свойствами:

1. Пересечение любых двух множеств из $\mathcal{B}$ содержит некоторое множество из $\mathcal{B}$;
2. $\mathcal{B}$ непусто и $\emptyset$ не принадлежит $\mathcal{B}$.

Определение 1.1.4. Множество $\mathcal{B} \subseteq 2^X$, удовлетворяющее этим свойствам, называется **базисом** порождаемого им фильтра.

Определение 1.1.5. Пусть X — топологическое пространство, $\mathcal{F}$ — фильтр в X. Точку x называют **пределом фильтра** $\mathcal{F}$, если $\mathcal{F}$ мажорирует фильтр $\mathcal{B}(x)$ окрестностей этой точки. Точку x называют **пределом базиса фильтра** $\mathcal{B}$ в X, если фильтр с базисом $\mathcal{B}$ сходится к x.

Определение 1.1.6. Пусть f — отображение множества X в топологическое пространство Y и $\mathcal{F}$ — фильтр в X. Точка $y \in Y$ называется **пределом функции** f **по фильтру** $\mathcal{F}$, если базис фильтра $f(\mathcal{F})$ сходится к y. Обозначение: $y = \lim_{\mathcal{F}} f$.

Пусть X, Y — топологические пространства, f — отображение X в Y, $\mathcal{B}$ — фильтр окрестностей в X точки $a \in X$; тогда вместо $y = \lim_{\mathcal{B}} f$ пишут $y = \lim_{x \to a} f(x)$.

Упражнение 1.1.7. *Пусть X, Y — топологические пространства. Докажите, что отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно в точке $a \in X$ тогда и только тогда, когда $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ (напомним, что отображение f называется непрерывным в точке $a \in X$ если прообраз любой окрестности точки $f(a)$ в Y является окрестностью точки a).*

2 Предпучки и пучки

2.1 Определения

Определение 2.1.1. Пусть X — топологическое пространство. **Предпучок множеств** $\mathcal{F}$ сопоставляет каждому открытому множеству $U \subseteq X$ множество $\mathcal{F}(U)$, а каждой паре открытых множеств $U, V \subseteq X$ таких, что $V \subseteq U$ — отображение **ограничения** $\mathrm{res}_{UV}\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ такое, что $\mathrm{res}_{VW} \circ \mathrm{res}_{UV} = \mathrm{res}_{UW}$ для $W \subseteq V \subseteq U$ и $\mathrm{res}_{UU} = \mathrm{id}_U$. Элементы множества $\mathcal{F}(U)$ называются **сечениями** предпучка $\mathcal{F}$ над U. Вместо $\mathrm{res}_{uv}(\sigma)$ часто пишут $\sigma|_V$.

Удобно построить по топологическому пространству X категорию $\mathrm{Open}(X)$, объекты которой — открытые подмножества в X, а множество морфизмов из U в V состоит из одного элемента i, если $i\colon U \to V$ — вложение, и пусто в противном случае. Композиция морфизмов соответствует композиции вложений. Тогда предпучок множеств — это контравариантный функтор из $\mathrm{Open}(X)$ в $\mathfrak{Sets}$, то есть, функтор из $\mathrm{Open}(X)^{op}$ в $\mathfrak{Sets}$. Можно расширить это понятие и определить предпучки абелевых групп, колец, векторных пространств, $\ldots$.

Определение 2.1.2. Предпучок $\mathcal{F}$ называется **пучком**, если он удовлетворяет следующей дополнительной **аксиоме пучка**: пусть $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ — открытое покрытие открытого множества $U \subseteq X$. Тогда для любого набора $\{s_i \in \mathcal{F}(U_i)\}$ сечений таких, что

$$\mathrm{res}_{U_i, U_i \cap U_j} s_i = \mathrm{res}_{U_j, U_i \cap U_j} s_j \text{ для всех } i, j \in I,$$

существует единственный элемент $s \in \mathcal{F}(U)$ такой, что $\mathrm{res}_{U,U_i}(s) = s_i$ для всех i.

Нетрудно переформулировать аксиому пучка следующим образом: пусть $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ — открытое покрытие открытого множества $U \subseteq X$, $\{s_i \in \mathcal{F}(U_i)\}$ — набор сечений таких, что $\mathrm{res}\, U_i, U_i \cap U_j s_i = \mathrm{res}_{U_j, U_i \cap U_j} s_j$ для всех $i, j \in I$. Тогда

F1 если $s, t \in \mathcal{F}(U)$ таковы, что $s|_{U_i} = t|_{U_i} = s_i$ для всех $i \in I$, то $s = t$.

F2 существует $s \in \mathcal{F}(U)$ такой, что $s|_{U_i} = s_i$ для всех $i \in I$.

Предпучок, удовлетворяющий свойству F1, называется **отделимым**. Аксиома пучка выражает тот факт, что сечения задаются *локально*, и любое согласованное локальное задание определяет единственное глобальное сечение. Заметим, что у пустого множества есть пустое покрытие, подставляя которое в аксиому пучка, можно получить, что $\mathcal{F}(\emptyset)$ — одноточечное множество (терминальный объект в категории $\mathfrak{Sets}$). В этом месте Хартсхорн в книге «Алгебраическая геометрия» делает ошибку, включая требование терминальности $\mathcal{F}(\emptyset)$ в определение предпучка.

Примеры 2.1.3. 1. Если X — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$, то сопоставление каждому открытому подмножеству $U \subset X$ множества дифференцируемых функций (с ограничениями функций в качестве отображений res) является пучком; этот пучок называется **пучком дифференцируемых функций** на X. Действительно, дифференцируемость — локальное понятие.

Для сравнения — определение из книги Гриффитса, Харриса «Принципы алгебраической геометрии», verbatim (цит. по русскому переводу, М., сМир, т. I, с. 47–48): о

> Пусть задано топологическое пространство X; *пучок* $\mathcal{F}$ на X сопоставляет каждому открытому множеству $U \subset X$ группу $\mathcal{F}(U)$, называемую группой сечений $\mathcal{F}$ над U, и каждой паре $U \subset V$ открытых подмножеств в X гомоморфизм $r_{V,U}\colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$, называемый гомоморфизмом ограничения; при этом должны выполняться следующие условия.
>
> 1. Для любой тройки $U \subset V \subset W$ открытых множеств $r_{W,U} = r_{V,U} \cdot r_{W,V}$. В силу этого соотношения можно вместо $r_{V,U}(\sigma)$ писать $\sigma|_U$.
> 2. Для любой пары открытых множеств $U, V \subset M$ и сечений $\sigma \in \mathcal{F}(U)$, $\tau \in \mathcal{F}(V)$ таких, что $\sigma|_{U\cap V} = \tau|_{U\cap V}$, найдется такое сечение $\rho \in \mathcal{F}(U \cup V)$, что $\rho|_U = \sigma$, $\rho|_V = \tau$.
> 3. Если $\sigma \in \mathcal{F}(U \cup V)$ и $\sigma|_U = \sigma|_V = 0$, то $\sigma = 0$.

Упражнение 2.1.4. *Что не так в этом определении (если не считать опечатку $X \mapsto M$ в пункте 2)? Подсказка — в следующем примере.*

Пример 2.1.5. Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}(U)$ — множество ограниченных непрерывных функций $U \to \mathbb{R}$ для открытых $U \subseteq X$ и $\mathrm{res}_{V,U}\colon F(V) \to F(U)$ — обычные отображения ограничения функций для открытых $U \subseteq V \subseteq X$. Докажите, что $\mathcal{F}$ является отделимым предпучком, но не пучком.

Пример 2.1.6. Определим **стандартный симплекс** $\Delta_n = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_i = 1, x_i \geq 0\}$. Это топологическое пространство (с индуцированной топологией). Непрерывное отображение $\Delta_n \to X$ называется **сингулярным n-симплексом в** X. Пусть A — фиксированная абелева группа. **Сингулярной коцепью в** X **со значениями в** A называется сопоставление каждому сингулярному симплексу в X элемента группы A. Для каждого открытого множества U в X обозначим через $S^n(U)$ множество всех сингулярных коцепей в U. Если V – открытое подмножество U, имеется очевидное включение множества сингулярных симплексов в V в множество сингулярных симплексов в U. Оно задает отображение ограничения $S^n(U) \to S^n(V)$. Нетрудно видеть, что S^n является предпучком; он называется **предпучок сингулярных коцепей в** X. Легко видеть, что S^n не удовлетворяет аксиоме F1, но удовлетворяет аксиоме F2.

Еще одна переформулировка аксиомы пучка: пусть $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ — открытое покрытие открытого множества $U \subseteq X$. Рассмотрим последовательность

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\quad\alpha\quad} \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i) \overset{\beta}{\underset{\gamma}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j\in I} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)\ ,$$

где $\alpha\colon s \to (s|_{U_i})$, $\beta\colon (s_i) \to (s_i|_{U_i\cap U_j})$, $\gamma\colon (s_i) \to (s_j|_{U_i\cap U_j})$. Предпучок $\mathcal{F}$ является пучком тогда и только тогда, когда α является уравнителем β и γ для любого открытого U и для любого его открытого покрытия.

Определение 2.1.7. Морфизмом предпучков $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ на пространстве X называется естественное преобразование функторов. То есть, для каждого открытого $U \subseteq X$ должно быть задано отображение $\varphi(U)\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ такое, что для $U \subseteq V$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\varphi(V)"] \arrow[d, "\mathrm{res}_{V,U}"'] & \mathcal{G}(V) \arrow[d, "\mathrm{res}_{V,U}"] \\
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi(U)"'] & \mathcal{G}(U)
\end{tikzcd}$$

Если $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ — пучки, **морфизмом пучков** называется любой морфизм предпучков между ними.

2.2 Ассоциированный пучок

Еще один пример пучка: пусть E — топологическое пространство, $\pi\colon E \to X$ — непрерывное сюръективное отображение (говорят, что π — *расслоение* над X). Сопоставим каждому открытому $U \subseteq X$ множество непрерывных *сечений* отображения π над U, то есть, непрерывных отображений $\sigma\colon U \to E$ таких, что $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_U$. Нетрудно понять, что это сопоставление является пучком на X. В частности, если $E = X \times Y$, получаем пучок непрерывных функций в Y.

На самом деле, как мы скоро увидим, любой пучок является пучком сечений некоторого расслоения.

Определение 2.2.1. Пусть $x \in X$, $\mathcal{F}$ — предпучок на X. Предел $\varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U)$ называется **слоем** предпучка $\mathcal{F}$ в точке x. Иными словами, рассмотрим множество пар $(U \ni x, s \in \mathcal{F}(U))$ и определим отношение эквивалентности следующим образом: $(U, s) \sim (V, t)$ тогда и только тогда, когда сечения s и t совпадают на некоторой окрестности точки x, то есть, существует открытое $W \subseteq U \cap V$ такое, что $x \in W$ и $s|_W = t|_W$. Фактор-множество по этому отношению эквивалентности и есть слой $\mathcal{F}$ в точке x. При этом для каждого $U \ni x$ определено отображение $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x$, сопоставляющее сечению $s \in \mathcal{F}(U)$ класс пары (U, s), называемый **ростком** сечения s в точке x. Мы будем обозначать росток сечения s в x через s_x.

Посмотрим теперь на предпучки со значениями в какой-нибудь аддитивной категории. Мы можем определить слой предпучка и в этой ситуации как копредел (если он существует). Например, в категории абелевых групп существуют все копределы, поэтому слой $\mathcal{F}_x$ предпучка $\mathcal{F}$ абелевых групп является абелевой группой. С другой стороны, можно рассмотреть предел $\mathcal{F}$ как предпучка множеств и явным образом задать на нем структуру абелевой группы: чтобы сложить пары (U, s) и (V, t), достаточно посмотреть на ограничения $s|_{U\cap V}$ и $t|_{U\cap V}$, лежащие в одной абелевой группе $\mathcal{F}(U \cap V)$, и сложить их. Нетрудно проверить, что эта операция пропускается через факторизацию по описанному отношению эквивалентности и, стало быть, задает корректным образом структуру абелевой группы на $\mathcal{F}_x$.

Построим теперь по предпучку $\mathcal{F}$ на X множество $E(\mathcal{F}) = \coprod_{x \in X} \mathcal{F}_x$. Пусть π — очевидное отображение $E \to X$, $s \mapsto x$ для $s \in \mathcal{F}_x$. Зададим топологию на $E(\mathcal{F})$ следующим образом: по каждому сечению $s \in \mathcal{F}(U)$ для открытого $U \subseteq X$ построим отображение $\tilde{s}\colon U \to E(\mathcal{F})$, отправляющее x в s_x. Объявим открытыми в $E(\mathcal{F})$ образы всех таких отображений; то есть, рассмотрим топологию на $E(\mathcal{F})$, порожденную множествами $\tilde{s}(U)$ при всех открытых $U \subseteq X$, $s \in \mathcal{F}(U)$. Нетрудно проверить, что проекция $\pi\colon E(\mathcal{F}) \to X$ является непрерывным отображением.

Определение 2.2.2. Пучок сечений отображения $\pi\colon E(\mathcal{F}) \to X$ называется **пучком, ассоциированным с предпучком** $\mathcal{F}$ и обозначается через $\mathcal{F}^+$. Процедура построения ассоциированного пучка по предпучку называется также **шифификацией** (**sheafification**).

Пример 2.2.3. Пусть A — фиксированное множество (абелева группа,...). Пучок, ассоциированный с постоянным предпучком $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}(U) = A$, называется **постоянным пучком** и иногда обозначается через $\underline{A}$. Проделав конструкцию, описанную выше, мы придем к расслоению $E(\mathcal{F}) = X \times A \to X$. Поэтому $\underline{A}$ является просто пучком непрерывных отображений в A (с дискретной топологией), то есть, пучком локально постоянных функций в A.

Оказывается, если предпучок $\mathcal{F}$ является пучком, то $\mathcal{F}^+$ изоморфен $\mathcal{F}$. Именно в этом смысле любой пучок является пучок сечений какого-то расслоения. Однако, топологическое пространство $E(\mathcal{F})$ не очень-то приятно: например, нас чаще всего интересует случай хаусдорфового X, но при этом $E(\mathcal{F})$ почти никогда не является хаусдорфовым.

Дадим более явное определение пучка, ассоциированного с предпучком $\mathcal{F}$ на X. Пусть $\mathcal{F}^+(U)$ — множество отображений $s\colon U \to \coprod_{x\in U} \mathcal{F}_x$, удовлетворяющих следующим свойствам:

1. $s(x) \in \mathcal{F}_x$;
2. существуют покрытие $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ множества U открытыми множествами и набор сечений $(s_i \in \mathcal{F}(U_i))_{i\in I}$ такие, что для всех $i \in I$ и $y \in U_i$ слой сечения s_i в точке y совпадает с $s(y)$.

Иными словами, элементы $\mathcal{F}^+(U)$ локально выглядят как сечения предпучка $\mathcal{F}$. Интуитивно, мы собираем такие наборы сечений, которые склеивались бы, если бы $\mathcal{F}$ являлся пучком (очевидно, что сечения s_i из пункта (2) определения выше согласованы на пересечениях $U_i \cap U_j$), и объявляем их сечениями нашего нового предпучка $\mathcal{F}^+$. Отображения ограничения для $\mathcal{F}^+$ задаются естественным образом. Нетрудно проверить, что (в силу локальности определения) $\mathcal{F}^+$ является пучком.

С каждым предпучком $\mathcal{F}$ связан канонический морфизм предпучков $\mathrm{sh}_{\mathcal{F}}\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$. При конструкции $\mathcal{F}^+$ как пучка сечений расслоения $\pi\colon E(\mathcal{F}) \to X$ он выглядит так: сечению $s \in \mathcal{F}(U)$ сопоставим определенное выше отображение $\tilde{s}\colon U \to E(\mathcal{F})$ (очевидно, что оно дает тождественное в композиции с π, и некоторая проверка показывает, что оно является непрерывным). При явном задании $\mathcal{F}^+$ видно, что каждый элемент $s \in \mathcal{F}(U)$ задает отображение $U \to \coprod_{x\in U} \mathcal{F}_x$, $x \mapsto s_x$, удовлетворяющее свойствам (1) и (2) выше (фактически, это снова отображение $\tilde{s}$).

Оказывается, шифификация обладает хорошим универсальным свойством. Рассмотрим категорию $\mathrm{PreSh}(X)$ предпучков на X и категорию $\mathrm{Sh}(X)$ пучков на X. По определению $\mathrm{Sh}(X)$ является полной подкатегорией в $\mathrm{PreSh}(X)$; обозначим через U «забывающий» функтор вложения $U\colon \mathrm{Sh}(X) \hookrightarrow \mathrm{PreSh}(X)$. Тогда шифификация является функтором

$$\mathrm{Sh}\colon \mathrm{PreSh}(X) \to \mathrm{Sh}(X),$$

левым сопряженным к U. Это определение означает, что канонический морфизм предпучков $\mathrm{sh}_{\mathcal{F}}\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ обладает следующим свойством: для любого пучка $\mathcal{G}$ и для любого морфизма предпучков $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ существует морфизм пучков $\tilde{\varphi}\colon \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ такой, что $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \mathrm{sh}_{\mathcal{F}}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\mathrm{sh}_{\mathcal{F}}"] \arrow[dr, "\forall\varphi"'] & \mathcal{F}^+ \arrow[d, dashed, "\exists!\,\tilde{\varphi}"] \\
& \mathcal{G}
\end{tikzcd}$$

Иначе говоря, имеется функториальный изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(X)}(\mathcal{F}^+, \mathcal{G}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{PreSh}(X)}(\mathcal{F}, U\mathcal{G})$$

Шифификация является каноническим способом построения пучка по предпучку, поэтому важно понимать, как связаны $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^+$. Мы уже упоминали, что если $\mathcal{F}$ является пучком, то ассоциированный с ним пучок $\mathcal{F}^+$ изоморфен $\mathcal{F}$ (это легко следует из универсального свойства). Несложно доказать следующие два утверждения:

Теорема 2.2.4. *Отображения* $(\mathrm{sh}_{\mathcal{F}})_U \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}^+(U)$ *инъективны для всех открытых* $U \subseteq X$ *тогда и только тогда, когда предпучок* $\mathcal{F}$ *является отделимым (то есть, удовлетворяет аксиоме F1 из определения пучка).*

Теорема 2.2.5. *Отображения* $(\mathrm{sh}_{\mathcal{F}})_U \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}^+(U)$ *биективны для всех открытых* $U \subseteq X$ *тогда и только тогда, когда предпучок* $\mathcal{F}$ *является пучком.*

Логично предположить, что сюръективность отображений $(\mathrm{sh}_{\mathcal{F}})_U$ связана с аксиомой F2. Это действительно верно при дополнительных предположениях на пространство X:

Теорема 2.2.6. *Если каждое открытое подмножество пространства* X *паракомпактно и* $\mathcal{F}$ *удовлетворяет аксиоме F2 из определения пучка, то отображения* $(\mathrm{sh}_{\mathcal{F}})_U \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}^+(U)$ *сюръективны для всех открытых* $U \subseteq X$.

2.3 Свойства морфизмов пучков

Пусть теперь $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ — предпучки абелевых групп, $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ — морфизм предпучков. Попытаемся определить ядро и образ морфизма φ. По определению для каждого открытого $U \subseteq X$ отображение $\varphi_U \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ является гомоморфизмом групп. Сопоставим множеству U группу $\mathrm{Ker}(\varphi_U)$. Легко видеть, что это сопоставление является предпучком. Обозначим его через $\mathrm{Ker}(\varphi)$. Является ли этот предпучок пучком? Если $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ и $(s_i \in \mathrm{Ker}(\varphi_{U_i}))$ — согласованный набор сечений, то его можно рассмотреть как набор сечений $(s_i \in \mathcal{F}(U_i))$ и (поскольку $\mathcal{F}$ является пучком) склеить в одно сечение $s \in \mathcal{F}(U)$. Посмотрим на образ $\varphi_U(s) \in \mathcal{G}(U)$. При ограничении на каждое U_i мы получаем

$$(\varphi_U(s))|_{U_i} = \varphi_{U_i}(s|_{U_i}) = \varphi_{U_i}(s_i) = e \in \mathcal{G}(U_i).$$

Но мы знаем, что сечение $e \in \mathcal{G}(U)$ также дает $e \in \mathcal{G}(U_i)$ при ограничении на каждое U_i. Поскольку $\mathcal{G}$ является пучком, сечения $\varphi_U(s)$ и $e \in \mathcal{G}(U)$ должны совпадать. Это значит, что s лежит в $\mathrm{Ker}(\varphi_U)$. Стало быть, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ является пучком.

Попытаемся сделать то же самое для образа морфизма φ. Для каждого открытого $U \subseteq X$ положим $\mathrm{Im}(\varphi)(U) = \mathrm{Im}(\varphi_U)$. Легко видеть, что $\mathrm{Im}(\varphi)$ — предпучок. Является ли он пучком? Если $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ и $(t_i \in \mathrm{Im}(\varphi_{U_i}))$ — согласованный набор сечений, то его можно рассмотреть как набор сечений $(t_i \in \mathcal{G}(U_i))$ и (поскольку $\mathcal{G}$ является пучком) склеить в одно сечение $t \in \mathcal{G}(U)$. Нам хочется, чтобы сечение t лежало в образе гомоморфизма $\varphi_U \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$. Как найти подходящий прообраз $s \in \mathcal{F}(U)$? Каждое t_i лежит в образе гомоморфизма φ_{U_i}, поэтому можно выбрать какие-нибудь прообразы $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$: $t_i = ph_{U_i}(s_i)$. Можно ли склеить эти s_i в одно сечение $s \in \mathcal{F}(U)$? Увы, не обязательно: s_i могут быть не согласованы на пересечениях. Действительно, мы знаем лишь, что $s_i|_{U_i \cap U_j}$ и $s_j|_{U_i \cap U_j}$ переходят в одно и то же сечение $t_i|_{U_i \cap U_j} = t_j|_{U_i \cap U_j}$ под действием $\varphi_{U_i \cap U_j}$. Это означает, что разность $s_i|_{U_i \cap U_j} - s_j|_{U_i \cap U_j}$ лежит в ядре гомоморфизма $\varphi_{U_i \cap U_j}$. Если это ядро нетривиально, склеить набор (s_i) не получится.

Пойдем на шаг дальше: может быть, можно подправить $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ так, чтобы полученные сечения склеивались? Ведь, если $t \in \mathcal{G}(U)$ действительно является образом некоторого $s \in \mathcal{F}(U)$, то ограничения s на U_i должны давать согласованный набор сечений, являющихся прообразами t_i. Постараемся заменить s_i на $s_i + u_i$; должно выполняться

$$\varphi_{U_i}(s_i + u_i) = t_i = \varphi_{U_i}(s_i),$$

поэтому $u_i \in \mathrm{Ker}(\varphi_{U_i})$. Условие согласованности на пересечениях для набора $(s_i + u_i)$ означает, что $(s_i + u_i)|_{U_i \cap U_j} = (s_j + u_j)|_{U_i \cap U_j}$. Отсюда

$$u_i|_{U_i \cap U_j} - u_j|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} - s_i|_{U_i \cap U_j}$$

Обозначим правую часть данного равенства через s_{ij}. Нетрудно видеть, что

$$s_{ij} = -s_{ij} \text{ и } s_{ij}|_W + s_{jk}|_W + s_{ki}|_W = 0$$

для любых i, j, k, где $W = U_i \cap U_j \cap U_k$. Набор сечений (s_{ij}), удовлетворяющий данным соотношениям, называется *1-коциклом.* Итак, у нас есть 1-коцикл (s_{ij}), и мы хотим найти набор $(u_i \in \mathrm{Ker}(\varphi_{U_i}))$ такой, что $u_i - u_j = s_{ij}$ в ограничении на $U_i \cap U_j$. Видно, что это какое-то условие на пучок $\mathrm{Ker}(\varphi)$; такой набор всегда найдется, например, если всякий 1-коцикл является *1-кограницей*, то есть, набором вида $(u_i|_{U_i\cap U_j} - u_j|_{U_i\cap U_j})$. Изучение этого вопроса приводит к важному понятию *когомологий пучков*, к которому мы вернемся позже.

Этот пример наводит на мысль о том, что сюръективность отображения пучков φ не всегда приводит к сюръективности отображений φ_U. Обозначим через S^1 множество комплексных чисел модуля 1: $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Рассмотрим отображение $\mathrm{expi}\colon \mathbb{R} \to S^1$, $x \mapsto \exp(ix)$ — прямая $\mathbb{R}$ наматывается на окружность S^1. Его ядром является множество вещественных чисел вида $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому имеет место следующая короткая точная последовательность:

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{2\pi} \mathbb{R} \xrightarrow{\mathrm{expi}} S^1$$

Пусть теперь X — некоторое топологическое пространство. Применим к полученной последовательности функтор $\mathrm{Map}(X, -)$ (здесь Map обозначает, например, множество дифференцируемых отображений, или множество непрерывных отображений). Здесь мы рассматриваем $\mathbb{Z}$ как топологическую группу с дискретной топологией, поэтому $\mathrm{Hom}(X, \mathbb{Z})$ — постоянный пучок $\underline{\mathbb{Z}}$. Обозначим пучок $\mathrm{Hom}(X, \mathbb{R})$ через $C(X)$ — это пучок непрерывных числовых функций на X. Получим последовательность

$$\underline{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{C}(X) \longrightarrow \mathrm{Map}(X, S^1),$$

которая называется **экспоненциальной последовательностью**. Подставим, например, в качестве пространства X окружность S^1. Второй морфизм в этой последовательности *локально сюръективно* — любой непрерывное отображение $S^1 \to S^1$ локально распрямляется до отображение из S^1 в прямую. Эта локальная сюръективность дает нам основание называть этот морфизм пучков сюръективным.

Комплексный вариант экспоненциальной последовательности получается из точной последовательности

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{2\pi i} \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^*$$

применением функтора $\mathrm{Hom}(X, -)$; здесь Hom обозначает множество отображений, дифференцируемых в комплексном смысле. Получается последовательность

$$\underline{\mathbb{Z}} \longrightarrow C^\infty(X) \longrightarrow C^\infty(X)^*$$

Подставляя, например, $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, получаем последовательность пучков, в которой второй морфизм является сюръективным морфизмом пучков (мы можем локально брать логарифм). Однако, этот морфизм не сюръективен на сечениях. В самом деле, посмотрим на тождественное отображение $X \to X$ как на элемент $C^\infty(X)^*$ — оно не получается экспоненцированием никакого отображения $X \to \mathbb{C}$: достаточно рассмотреть обход вокруг 0 по единичной окружности.

Итак, мы определили ядро морфизма пучков абелевых групп $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ как пучок $\mathrm{Ker}(\varphi)\colon U \mapsto \mathrm{Ker}(\varphi_U)$. В то же время, предпучок $U \mapsto \mathrm{Im}(\varphi_U)$ не всегда является пучком, поэтому мы определим пучок $\mathrm{Im}(\varphi)$ как пучок, ассоциированный с ним.

Проясним теперь вопрос об инъективности и сюръективности морфизмов пучков. Пусть $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ — морфизм пучков на X, $x \in X$. Возьмем элемент $\sigma \in \mathcal{F}_x$ слоя пучка $\mathcal{F}$ в точке x. По определению он представлен каким-нибудь сечением $s \in \mathcal{F}(U)$ в окрестности U точки x. Можно рассмотреть сечение $t = \varphi_U(s) \in \mathcal{G}(U)$ пучка $\mathcal{G}$ и его образ $\tau \in \mathcal{G}_x$ в слое. Несложно проверить, что τ не зависит от выбора представителя $s \in \mathcal{F}(U)$. Таким образом, морфизм φ индуцирует морфизм слоев $\mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$, который мы будем обозначать через φ_x.

Определение 2.3.1. Морфизм пучков $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ на топологическом пространстве X называется **инъективным** (**сюръективным**, **биективным**), если для каждой точки $x \in X$ индуцированное отображение $\mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ инъективно (сюръективно, биективно).

Теорема 2.3.2. *Морфизм пучков $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ инъективен (биективен) тогда и только тогда, когда для каждого открытого $U \subseteq X$ отображение $\varphi_U\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ инъективно (биективно).*

Доказательство. Заметим, что если $\mathcal{F}$ является пучком, то для каждого открытого множества $U \subseteq X$ отображение $i(\mathcal{F})_U\colon \mathcal{F}(U) \to \prod_{x\in U} \mathcal{F}_x$, $s \mapsto (s_x)_{x\in U}$ является инъективным. Из функториальности следует, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "i(\mathcal{F})_U"] \arrow[d, "\varphi_U"'] & \prod_{x\in U} \mathcal{F}_x \arrow[d, "\prod \varphi_x"] \\
\mathcal{G}(U) \arrow[r, "i(\mathcal{G})_U"'] & \prod_{x\in U} \mathcal{F}_x
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Поэтому из инъективности правой вертикальной стрелки следует инъективность левой вертикальной стрелки. Обратно, если φ_U инъективно для всех U, то все φ_x инъективны как инъективные пределы инъективных отображений. Случай биективности оставляется читателю в качестве упражнения. $\square$

Теорема 2.3.3. *Морфизм пучков $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ сюръективен тогда и только тогда, когда для каждого открытого $U \subseteq X$ и для каждого сечения $t \in \mathcal{G}(U)$ существует покрытие $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ открытыми множествами U_i и набор сечений $(s_i \in \mathcal{F}(U_i))$ такие, что $\varphi_{U_i}(s_i) = t|_{U_i}$.*

Доказательство. Упражнение (см. анализ предпучка $\operatorname{Im} \mathcal{F}$ выше). $\square$

Определение 2.3.4. Пусть $\mathcal{F}$ — предпучок на X. **Ограничением** предпучка $\mathcal{F}$ на открытое множество $U \subseteq X$ называется предпучок $\mathcal{F}_U$ на U, заданный равенством $\mathcal{F}_U(V) = \mathcal{F}(V)$ для $V \subseteq U$; гомоморфизмы ограничения $\mathcal{F}_U$ такие же, как у $\mathcal{F}$. Если $\mathcal{F}$ — пучок на X, то $\mathcal{F}_U$ — пучок на U.

2.4 Прямой и обратный образы

Мы определили морфизмы между предпучками и пучками, заданными на одном топологическим пространством. Возникает естественный вопрос — как связаны между собой пучки на различных топологических пространствах? Можно ли переносить пучки вдоль непрерывных отображений?

Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств. Сейчас мы увидим, что из пучка на X при помощи этого отображения можно (естественным образом) получить пучок на Y, а из пучка на Y — пучок на X, причем эти операции настолько похожи на взаимно обратные, насколько это возможно (а именно, они задаются сопряженными функторами).

Для пучка $\mathcal{F}$ на X определим предпучок $f_*\mathcal{F}$ на Y формулой $(f_*\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$, где V пробегает открытые множества пространства Y; заметим, что по непрерывности отображения f прообраз $f^{-1}(V)$ всегда является открытым множеством. Отображения ограничения для $f_*\mathcal{F}$ совпадают с соответствующими отображениями ограничения пучка $\mathcal{F}$.

Упражнение 2.4.1. *Проверьте, что предпучок $f_*\mathcal{F}$ является пучком.*

Пучок $f_*\mathcal{F}$ называется **прямым образом** пучка $\mathcal{F}$ вдоль отображения f.

Пусть теперь $\mathcal{G}$ — пучок на Y. Хотелось бы определить пучок на X следующим образом: $U \mapsto \mathcal{G}(f(U))$, где U пробегает открытые множества в X. Однако, возникают две проблемы. Во-первых, образ $f(U)$ открытого множества U уже не обязан быть открытым в Y. На самом деле, мы уже умеем бороться с этой проблемой. Напомним, что для точки $y \in Y$ мы определили слой $\mathcal{G}_y$ пучка $\mathcal{G}$ как (прямой) предел множеств сечений пучка $\mathcal{G}$ по всем открытым, содержащим y. Неформально, если бы пучок $\mathcal{G}$ имел сечения не только над открытыми множествами, но и над отдельными точками, то множеством сечений над y был бы как раз слой $\mathcal{G}_y$. Это определение моментально обобщается.

Определение 2.4.2. Назовем **слоем** пучка $\mathcal{G}$ над произвольным множеством $Z \subseteq Y$ прямой предел множеств $\mathcal{G}(V)$ по всем открытым множествам V, содержащим Z. Обозначение: $\mathcal{G}(Z) = \varinjlim_{V \supseteq Z} \mathcal{G}(V)$. Элементы $\mathcal{G}(Z)$ называются **сечениями** $\mathcal{G}$ над множеством Z.

Очевидно, что это определение согласовано и с определением сечений пучка (если Z открыто, то этот предел равен $\mathcal{G}(Z)$), и с определением слоя (если $Z = \{y\}$, то этот предел равен $\mathcal{G}_y$).

Итак, теперь естественно определить предпучок $f^\bullet\mathcal{G}$ на X формулой

$$(f^\bullet\mathcal{G})(U) = \varinjlim_{V \supseteq f(U)} \mathcal{G}(V).$$

Отображения ограничения снова получаются автоматическим образом (с учетом свойств предела). Вторая проблема состоит в том, что полученный предпучок не обязан являться пучком. Но и с этим мы уже умеем бороться — нужно перейти к ассоциированному пучку.

Пучок, ассоциированный с предпучком $f^\bullet\mathcal{G}$, называется **обратным образом** пучка $\mathcal{G}$ вдоль отображения f и обозначается через $f^{-1}\mathcal{G}$.

Приведем альтернативную конструкцию обратного образа. Как мы знаем, каждый пучок является пучком сечений некоторого накрывающего пространства. Пусть $\mathcal{G}$ — пучок сечений проекции $\pi\colon E \to Y$. Рассмотрим расслоенное произведение X и E над Y:

$$\begin{tikzcd} X \times_Y E \arrow[r] \arrow[d, "\pi'"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Можно проверить, что пучок сечений проекции π' и будет обратным образом пучка $\mathcal{G}$ вдоль f.

Оказывается, функторы f_* и f^{-1} устанавливают сопряжение между категорией пучков на X и категорией пучков на Y. То есть, для каждого непрерывного $f\colon X \to Y$ и для любых пучков $\mathcal{F}$ на X, $\mathcal{G}$ на Y имеется естественная биекция

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(X)}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}).$$

Естественность этой биекции заключается в том, что она ведет себя согласованно с очевидными отображениями, которые возникают при замене пучка $\mathcal{F}$ на пучок $\mathcal{F}'$ (на пространстве

X) и пучка $\mathcal{G}$ на пучок $\mathcal{G}'$ (на пространстве Y). Иными словами, эта биекция определяет естественное преобразование между бифункторами $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(X)}(f^{-1}-,-)$ и $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(Y)}(-,f_*-)$.

Для доказательства этой сопряженности можно установить естественную биекцию между каждым из двух фигурирующих в ней множеств Hom и некоторым третьим множеством. А именно, рассмотрим всевозможные наборы отображений из $\mathcal{G}(V)$ в $\mathcal{F}(U)$, индексированные всеми парами открытых $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ такими, что $f(U) \subseteq V$, согласованные с отображениями ограничения пучков $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$.

Упражнение 2.4.3. *Установите естественные биекции между этим множеством и каждым из множеств* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(X)}(f^{-1}\mathcal{G},\mathcal{F})$*,* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(Y)}(\mathcal{G},f_*\mathcal{F})$*.*

3 Гладкие многообразия

3.1 Определение многообразия

Определение 3.1.1. Топологическое пространство X вместе с подпучком $\mathcal{A}$ пучка непрерывных функций на X (со значениями в $\mathbb{R}$) называется **дифференциальным многообразием класса** C^r $(0 \le r \le \infty)$, если выполняются следующие условия:

- X — хаусдорфово и обладает счетной базой;
- у любой точки $x \in X$ существует открытая окрестность U такая, что U гомеоморфно некоторому открытому подмножеству V в $\mathbb{R}^n$, и при этом гомеоморфизме пучок $\mathcal{A}|_U$ изоморфен пучку функций класса C^r на этом открытом подмножестве.

Уточним второе условие: конечно, нельзя говорить об изоморфизме пучков, заданных на разных топологических пространствах U и V. Однако, если $\varphi\colon U \to V$ — гомеоморфизм между этими пространствами, то можно сравнить пучок $\varphi_*(\mathcal{A}|_U)$ с пучком $C^r(V)$ функций класса C^r на V. Второе условие говорит, что эти пучки на V должны быть изоморфны. По сопряженности это равносильно изоморфности пучков $\varphi^{-1}(C^r(V))$ и $\mathcal{A}|_U$ на U. Открытая окрестность U точки x многообразия X, удовлетворяющая этому условию, называется **координатной окрестностью**.

Напомним, что для открытого подмножества $V \subseteq \mathbb{R}^n$ функция $\varphi\colon V \to \mathbb{R}$ называется **функцией класса** C^r, если она r раз непрерывно дифференцируема. Функции класса C^∞ называются **гладкими**, а дифференциальные многообразия класса C^∞ — **гладкими многообразиями**. В дальнейшем мы по умолчанию будем рассматривать только гладкие многообразия и называть их просто **многообразиями**.

Примеры 3.1.2.

1. Очевидно, что $\mathbb{R}^n$ (и вообще, любое конечномерное векторное пространство над $\mathbb{R}$) вместе с пучком гладких функций является многообразием.

2. Если $(M,\mathcal{A})$ — многообразие, $U \subseteq M$ — открытое подмножество, то подпространство U вместе с пучком $\mathcal{A}|_U$ является многообразием, которое мы будем называть **открытым подмногообразием** многообразия M.

3. Из первых двух примеров следует, что любое открытое подпространство $\mathbb{R}^n$ можно считать многообразием. Например, пространство $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ обратимых матриц $n \times n$ является открытым подмножеством пространства всех матриц $n \times n$ и поэтому снабжается структурой многообразия.

4. Пусть f — гладкая функция на $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим замкнутое подпространство $Z_f = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$. Предположим, что в каждой точке $x \in Z_f$ хотя бы одна из частных производных f не обращается в 0. Тогда Z_f снабжается естественной структурой многообразия следующим образом: сопоставим каждому открытому $U \subseteq Z_f$ множество функций на U, которые могут быть продолжены до гладкой функции в некоторой окрестности множества U в $\mathbb{R}^n$. Это сопоставление задает предпучок на Z_f. На самом деле, этот предпучок является пучком, но пока что можно рассмотреть ассоциированный пучок. Тогда у любой точки $x \in Z_f$ есть окрестность N в $\mathbb{R}^n$ такая, что какая-то частная производная f, например, $\partial f/\partial x_n$ не равна 0 в N. По теореме о неявной функции проекция $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_{n-1})$, является гладким изоморфизмом между $N \cap Z_f$ и некоторым открытым множеством V в $\mathbb{R}^{n-1}$. Благодаря этому изоморфизму построенный пучок удовлетворяет локальному условию из определения многообразия.

5. Специализируя предыдущий пример для функции $f(x) = \sum x_i^2 - 1$, можно получить множество векторов единичной длины в $\mathbb{R}^n$, называемое **единичной сферой** S^{n-1}.

Определение 3.1.3. Пусть $(M, \mathcal{A})$ — гладкое многообразие. Сечения пучка $\mathcal{A}$ на открытом множестве $U \subseteq M$ называются **гладкими функциями** на U.

Заметим, что элементы $\mathcal{A}(U)$ действительно являются функциями на U, поскольку по определению пучок $\mathcal{A}$ является подпучком пучка непрерывных функций на U.

Определение 3.1.4. Непрерывное отображение $f\colon M \to N$ между гладкими многообразиями называется **гладким**, если для любого $x \in M$ и для любой гладкой функции φ в окрестности $U \subseteq N$ точки $f(x)$ композиция $\varphi \circ f$ является гладкой функцией на $f^{-1}(U)$.

Гладкое отображение f, таким образом, определяет гомоморфизм из пучка $\mathcal{A}^N$ в пучок $f_*(\mathcal{A}^M)$, где $\mathcal{A}^N$, $\mathcal{A}^M$ — структурные пучки многообразий N и M соответственно. В силу сопряженности возникает и гомоморфизм из $f^{-1}(\mathcal{A}^N)$ в $\mathcal{A}^M$. Этот гомоморфизм называется **структурным гомоморфизмом**, ассоциированным с гладким отображением f.

Определение 3.1.5. Гладкое отображение $f\colon M \to N$ между гладкими многообразиями называется **диффеоморфизмом**, если оно биективно и обратное к нему отображение также является гладким.

Нетрудно привести пример биективного гладкого отображения, обратное к которому не является гладким, например, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$.

3.2 Разбиения единицы

Обсудим теперь первое условие из определения многообразия, а именно, наличие счетной базы.

Предложение 3.2.1. *Пусть X — хаусдорфово топологическое пространство с подпучком пучка непрерывных функций, локально изоморфным пучку гладких функций на открытом подмножестве $\mathbb{R}^n$. Равносильны:*

1. *X паракомпактно;*

2. *X метризуемо;*

3. *каждая компонента связности X обладает счетной базой;*

4. X обладает гладкими разбиениями единицы (см. ниже).

Кроме того, теорема Дьедонне утверждает, что хаусдорфово паракомпактное пространство нормально (то есть, любые два замкнутых подмножества можно окружить непересекающимися окрестностями). Из этого следует, что любое хаусдорфово паракомпактное пространство является shrinking space. Напомним определения.

Определение 3.2.2. Топологическое пространство X называется **паракомпактным**, если для любого открытого покрытия $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ существуют такие открытые множества $V_i \subseteq U_i$, что $X = \bigcup_{i \in I} V_i$ и покрытие $(V_i)_{i \in I}$ локально конечно, то есть, каждая точка x принадлежит лишь конечному числу из V_i.

Определение 3.2.3. Топологическое пространство X называется **shrinking space**, если для любого открытого покрытия $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ существуют такие открытые множества V_i, что $V_i \subseteq \overline{V_i} \subseteq U_i$ и V_i образуют локально конечное покрытие X.

Как раз последнее требование понадобится нам, чтобы сконструировать гладкие разбиения единицы. Сначала сведем задачу к случаю покрытия, состоящего из двух открытых множеств. Напомним, что **носителем** функции f называется замыкание множества точек, в которых $f \neq 0$: $\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \mid f(x) \neq 0\}}$.

Предложение 3.2.4. *Пусть M — многообразие. Следующие два условия равносильны.*

1. *Для любого локально конечного открытого покрытия $(U_i)_{i \in I}$ многообразия M существуют гладкие функции φ_i на M со значениями в $[0,1]$ такие, что $\operatorname{supp}(\varphi_i) \subseteq U_i$ и $\sum \varphi_i = 1$.*

2. *Для любых открытых множеств U, V таких, что $\overline{V} \subseteq U$, существует неотрицательная гладкая функция, носитель которой содержится в U, не обращающаяся в 0 ни в одной точке V.*

Доказательство. (1)⇒(2): рассмотрим открытое покрытие M, состоящее из двух элементов, $M \setminus \overline{V}$ и U. По предположению, найдутся функции φ, ψ со значениями в $[0,1]$, носители которых содержатся в $M \setminus \overline{V}$ и U соответственно, и сумма которых равна 1. Тогда ψ удовлетворяет условию (2).

(2)⇒(1): пусть (V_i) — открытое покрытие, для которого $\overline{V_i} \subseteq U_i$. По предположению, найдутся неотрицательные гладкие функции φ_i такие, что $\operatorname{supp} \varphi_i \subseteq U_i$ и φ_i не обращается в 0 нигде на V_i. Из локальной конечности покрытия видно, что сумма $\varphi = \sum \varphi_i$ определена, является гладкой и не обращается в 0 нигде. Набор функций $(\psi_i = \varphi_i / \varphi)$ удовлетворяет условию (1). □

Набор функций, удовлетворяющий условию (1), называется **гладким разбиением единицы**; сейчас мы покажем, что гладкие разбиения единицы существуют (для любого локально конечного открытого покрытия многообразия). Условие (2) можно проверить локально, окружив каждую точку $x \in M$ окрестностью M_x и заменив V на $V \cap N_x$, U на $U \cap N_x$. Действительно, после этого покрытие N_x можно ужать до локально конечного и просуммировать соответствующие функции. В качестве M_x мы возьмем окрестности, гомеоморфные открытым множествам в $\mathbb{R}^n$. После этого остается проверить следующее утверждение.

Предложение 3.2.5. *Пусть S_1, S_2 – шары в $\mathbb{R}^n$ с центрами в 0 такие, что $S_1 \subset S_2$. Существует гладкая функция, не равная нулю нигде внутри S_1, носитель которой содержится во внутренности S_2.*

Доказательство. Достаточно построить гладкую функцию на $\mathbb{R}^n$, не обращающуюся в 0 внутри единичного шара и равную 0 на его дополнении. На эту роль подходит функция $x \mapsto \exp(\frac{1}{\sum x_i^2 - 1})$. $\square$

Определение 3.2.6. Пусть (U_i) — локально конечное открытое покрытие гладкого многообразия M. Семейство (φ_i) гладких функций на M со значениями в $[0,1]$ называется **разбиением единицы, подчиненным покрытию** (U_i), если носитель φ_i содержится в U_i для всех i и $\sum \varphi_i = 1$.

Следующие два предложения говорят о том, что почти вся информация о многообразии извлекается из глобальных сечений его структурного пучка.

Предложение 3.2.7. *Пусть $(M, \mathcal{A})$ — гладкое многообразие. Любое сечение $\mathcal{A}$ над замкнутым множеством можно продолжить до гладкой функции на M. Иными словами, если φ — гладкая функция в окрестности замкнутого множества K, то существует гладкая функция $\tilde{\varphi}$ на M, совпадающая с φ в некоторой окрестности K.*

Доказательство. Пусть $K \subseteq U$ и φ — гладкая функция на U. Пусть V — окрестность K такая, что $\overline{V} \subseteq U$. Рассмотрим разбиение единицы, подчиненное покрытию $(U, M \setminus \overline{V})$. Найдется гладкая функция f на M, равная 1 на V и с носителем в U. Носитель функции $f\varphi$ при этом содержится в носителе функции f. Поэтому функция $f\varphi$ на U и постоянная функция 0 на $M \setminus (\operatorname{supp} f)$ совпадают на пересечении. Значит, их можно склеить в гладкую функцию на M, обладающую нужными свойствами. $\square$

Предложение 3.2.8. *Пусть M, N — гладкие многообразия. Если $f\colon M \to N$ — непрерывное отображение такое, что для всякой гладкой функции φ на N композиция $\varphi \circ f$ гладкая, то отображение f гладкое.*

Доказательство. Пусть $x \in M$ и φ — некоторая гладкая функция в окрестности точки $f(x)$. Нам нужно показать, что композиция $\varphi \circ f$ является гладкой в некоторой окрестности точки x. Пусть $\tilde{\varphi}$ — гладкая функция на N, совпадающая с φ в некоторой окрестности V точки $f(x)$; по предположению $\tilde{\varphi} \circ f$ является гладкой. При этом $\tilde{\varphi} \circ f$ совпадает с $\varphi \circ f$ в окрестности $U = f^{-1}(V)$ точки x, что и требовалось. $\square$

3.3 Дальнейшие примеры многообразий

Часто структура гладкого многообразия задается на хаусдорфовом топологическом пространстве M следующим образом. Предположим, что на каждом элементе U_i открытого покрытия $\{U_i\}$ задан подпучок $\mathcal{A}_i$ пучка непрерывных функций, и $(U_i, \mathcal{A}_i)$ — гладкое многообразие. Нам хочется склеить эти пучки в один пучок на M и превратить тем самым M в гладкое многообразие. Для этого нужно проверить, что пучок $\mathcal{A}_i|_{U_i \cap U_j}$ отождествляется с пучком $\mathcal{A}_j|_{U_i \cap U_j}$. Иными словами, открытые подмногообразия $U_i \cap U_j$ в U_i и $U_i \cap U_j$ в U_j должны совпадать. Для каждого i многообразие $(U_i, \mathcal{A}_i)$ изоморфно подмногообразию V_i в $\mathbb{R}^n$ при помощи гомеоморфизма $c_i\colon U_i \to V_i$. Пересечение $U_i \cap U_j$ дает два образа $V_{ij} = c_i(U_i \cap U_j) \subseteq V_i$ и $V_{ji} = c_j(U_i \cap U_j) \subseteq V_j$. Условие склейки состоит в том, что ограничения пучков $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{A}_j$ (пришедших из стандартных пучков гладких функций на V_i и V_j) на $U_i \cap U_j$ совпадают. Это означает, что гомеоморфизм $c_j \circ c_i^{-1}\colon V_{ij} \to V_{ji}$ является гладким для всех i, j.

Определение 3.3.1. Пусть M, N — гладкие многообразие. Снабдим топологическое пространство $M \times N$ структурой гладкого многообразия. Пусть M покрыто координатными окрестностями U_i, и $c_i\colon U_i \to V_i$ — координатные гомеоморфизмы, а N покрыто координатными окрестностями U'_j с гомеоморфизмами $c'_j\colon U'_j \to V'_j$. Тогда произведение $M \times N$ покрывается открытыми множествами $U_i \times U'_j$, гомеоморфными открытым множествам $V_i \times V'_j \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ при помощи отображений $c_i \times c'_j$. Условие склейки (гладкость каких-то композиций) легко проверяется. Нетрудно видеть, что отображение из некоторого гладкого многообразия L в $M \times N$ является гладким тогда и только тогда, когда его композиции с проекциями на M и на N являются гладкими. Поэтому $M \times N$ с определенной таким образом структурой многообразия называется **произведением** многообразий M и N.

Определение 3.3.2. Пусть Z — замкнутое подмножество многообразия M. Мы хотим определить структуру многообразия на M. Для этого наложим на Z следующее условие: у каждой точки $x \in Z$ существует открытая координатная окрестность U в M, гомеоморфная открытому множеству V в $\mathbb{R}^n$ с координатами $x_1, \dots, x_n$ такая, что образ $Z \cap U$ при этом гомеоморфизме является множеством точек в V, заданных уравнениями $x_1 = \dots = x_k = 0$ для некоторого натурального k. Это условие позволяет определить на Z структуру гладкого многообразия, взяв в качестве сечений структурного пучка над U прообраз множества гладких функций от оставшихся координат относительно изоморфизма, отождествляющего пучки гладких функций на U и на V. Пространство Z с так определенной структурой гладкого многообразия называется **замкнутым подмногообразием** многообразия M.

Определение 3.3.3. Пусть теперь M, N — два гладких многообразия и задано инъективное гладкое отображение $i\colon M \to N$. Потребуем выполнения следующего условия: для любой точки $x \in M$ существует координатная окрестность U точки $i(x)$ в N, гомеоморфная $V \subseteq R^n$, и окрестность U' точки x в N, причем $i(U') \subseteq U$, и $i(U')$ является множеством общих нулей некоторых координат в V. Тогда мы говорим, что i — **гладкая иммерсия** многообразия M в многообразие N.

Гладкая иммерсия — более общее (и более тонкое) понятие, чем гладкое подмногообразие.

Пример 3.3.4. Пусть $M = \mathbb{R}$ — вещественная прямая, $N = S^1 \times S^1$ — тор. Выберем иррациональное число $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ и рассмотрим отображение

$$f\colon \mathbb{R} \to S^1 \times S^1, \quad x \mapsto (\exp(2\pi i x), \exp(2\pi\alpha i x)).$$

Очевидно, что это гладкое отображение, и что оно инъективно (в силу иррациональности α). Нетрудно видеть, что f — гладкая иммерсия, но образ f не является подмногообразием в $S^1 \times S^1$; он даже не является локально связным пространством (с топологией, индуцированной с S^1).

Пример 3.3.5. Рассмотрим **вещественное проективное пространство** $\mathbb{RP}^n$ — фактор-пространство единичной сферы S^n по отношению эквивалентности, отождествляющему противоположные точки x и $-x$. Сопоставим каждому открытому множеству $U \subseteq \mathbb{RP}^n$ алгебру гладких функций на его прообразе в S^n, инвариантных относительно отображения $x \mapsto -x$. Легко видеть, что мы получим пучок $\mathbb{R}$-алгебр на $\mathbb{RP}^n$. У любой точки $a \in S^n$ есть окрестность (например, состоящая из точек, расстояние от которых до точки a меньше 1), которая гомеоморфно проектируется на открытое подмножество в $\mathbb{RP}^n$; при этом пучок гладких функций на этой окрестности отождествляется с пучком гладких функций на ее образе. Поэтому $\mathbb{RP}^n$ снабжается (естественным образом) структурой гладкого многообразия.

С другой стороны, мы могли бы отождествить $\mathbb{RP}^n$ с фактор-множеством множества точек $(x_0, \dots, x_n)$ по модулю эквивалентности $(x_0, \dots, x_n) \sim (y_0, \dots, y_n)$, если для некоторого $\lambda \neq 0$ выполнено $x_i = \lambda y_i$ для всех i. После этого нетрудно видеть, что $\mathbb{RP}^n$ покрывается открытыми множествами вида $\{x_i \neq 0\}$, гомеоморфными открытым множествам в $\mathbb{R}^n$, и при желании можно проверить условия склейки.

Более инвариантным образом, для любого векторного пространства V конечной размерности $n > 0$ можно рассмотреть множество $V \setminus \{0\}$ и профакторизовать его по отношению эквивалентности $v \sim \lambda v$ ($\lambda \neq 0$). Аналогичные рассуждения позволяют определить на полученном множестве $P(V)$ структуру гладкого многообразия; оно называется **проективизацией** пространства V.

3.4 Грассманиан

На точки $P(V)$ можно смотреть как на одномерные подпространства в V. Естественно попытаться обобщить эту конструкцию и рассмотреть множество всех r-мерных подпространств в V для некоторого фиксированного $r \leq \dim(V)$. Это множество называется **грассманианом r-мерных подпространств в V** и обозначается через $\mathrm{Gr}(V, r)$; для частного случая $V = \mathbb{R}^n$ используется обозначение $\mathrm{Gr}(n, r)$.

Повнимательнее посмотрим на случай $r = 1$. Пусть $V = \mathbb{R}^n$. Класс точки $(x_0, \dots, x_n)$ в фактор-множестве по отношению эквивалентности, описанному в примере 3.3.5, мы будем обозначать через $[x_0 : \dots : x_n]$; этот набор с точностью до пропорциональности называется **проективными координатами** точки.

Предположим, что $x_0 \neq 0$; тогда $[x_0 : x_1 : \dots : x_n] = [1 : y_1 : \dots : y_n]$, где $y_i = x_i/x_0$, причем y_i могут принимать любые значения. Это означает, что подмножество $\{x_0 \neq 0\}$ в $\mathbb{RP}^n$ изоморфно аффинному пространству $\mathbb{R}^n$.

Пусть теперь $x_0 = 0$; если $x_1 \neq 0$, то $[x_0 : x_1 : x_2 : \dots : x_n] = [0 : 1 : y_2 : \dots : y_n]$, где $y_2, \dots, y_n$ могут принимать любые значения. Стало быть, подмножество $\{x_0 = 0, x_1 \neq 0\}$ в $\mathbb{RP}^n$ изоморфно аффинному пространству $\mathbb{R}^{n-1}$.

Продолжая аналогичным образом, можно дойти до последнего случая: $x_0 = \dots = x_{n-1} = 0$, тогда обязательно $x_n \neq 0$ и $[x_0 : \dots : x_{n-1} : x_n] = [0 : \dots : 0 : 1]$ — одна точка, то есть, аффинное пространство $\mathbb{R}^0$.

Мы получили, что $\mathbb{RP}^n$ представляется в виде объединения

$$\mathbb{RP}^n = \mathbb{R}^n \sqcup \mathbb{R}^{n-1} \sqcup \dots \sqcup \mathbb{R}^0.$$

Построенные куски называются **клетками Шуберта**, а самый большой, открытый кусок $\mathbb{R}^n$ — **открытой клеткой Шуберта**. Разбиение проективного пространства на клетки Шуберта служит основой для его *мотивного разложения*.

Заметим также, что описанное построение зависит от выбора базиса в нашем пространстве, и при удачном выборе базиса можно добиться, чтобы любая наперед заданная точка оказалась в открытой клетке Шуберта. Все открытые клетки Шуберта для различных выборов базиса образуют, таким образом, покрытие проективного пространства, которое позволяет определить на нем структуру многообразия.

Проделаем аналогичную процедуру для грассманиана. В качестве примера рассмотрим $\mathrm{Gr}(4, 2)$ — множество двумерных подпространств в $\mathbb{R}^4$. Пусть $W \in \mathrm{Gr}(4, 2)$; выберем произвольный базис (w_1, w_2) в W и запишем координатные строчки векторов w_1, w_2 в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^4$. Мы получим матрицу размера 2×4. Элементарные преобразования строк этой матрицы соответствуют замене базиса (w_1, w_2) пространства W. К какому виду мы можем привести эту матрицу элементарными преобразованиями строк? Ответ дается методом Гаусса: произвольная матрица приводится ровно к одной из следующих форм:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Это означает, что $\mathrm{Gr}(4,2)$ является объединением шести клеток Шуберта, изоморфных $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^0$. При этом $\mathbb{R}^4$ соответствует открытой клетке, поэтому $\dim \mathrm{Gr}(4,2) = 4$,

Аналогично, $\mathrm{Gr}(n,k)$ является многообразием размерности $k(n-k)$, и клетки Шуберта соответствуют различным формам, к которым приводится матрица размера $k \times n$ с помощью метода Гаусс; открытая клетка Шуберта соответствует матрицам вида $(E_k|*)$.

Такое рассмотрение позволяет определить структуру многообразия на грассманиане, перенося гладкую структуру с пространства $\mathbb{R}^{k(n-k)}$ на открытую клетку Шуберта и варьируя базис, чтобы получить покрытие всего грассманиана. Нужно лишь аккуратным образом проследить за склейкой: связывающие функции между координатными отождествлениями пересечений двух открытых клеток должны быть гладкими.

Другой способ ввести гладкую структуру на грассманиане — рассмотреть его как замкнутое подмногообразие в проективном пространстве. Напомним, что для векторного пространства V определена **m-ая внешняя степень** $\Lambda^m V$ следующим образом. Рассмотрим категорию **знакопеременных полилинейных отображений** из

$$V^m = \underbrace{V \times \cdots \times V}_{m}.$$

Ее объекты — отображения $\varphi\colon V^m \to U$, линейные по каждому аргументу, такие, что $\varphi(\dots, v, \dots, v, \dots) = 0$ (то есть, если в наборе аргументов встретились два одинаковых вектора, значение φ должно равняться 0). Морфизмы в этой категории — линейные отображения, делающие треугольники коммутативными. Тогда m-ой внешней степенью V называется начальный объект этой категории. Иными словами, это объект $\Lambda^n V$ вместе со знакопеременным полилинейным отображением $f\colon V^m \to \Lambda^m V$ такой, что для любого знакопеременного полилинейного $\varphi\colon V^m \to U$ существует единственное линейное отображение $\tilde{\varphi}\colon \Lambda^m V \to U$ такое, что $\varphi = \tilde{\varphi} \circ f$.

Образ набора $(v_1, \dots, v_m) \in V^m$ в пространстве $\Lambda^m V$ мы будем обозначать через $v_1 \wedge \cdots \wedge v_m$. Заметим, что если $W \subseteq V$ и $\dim W = m$, то одномерное пространство $\Lambda^m W$ можно рассматривать как подпространство в $\Lambda^m V$.

Пусть $(e_1, \dots, e_n)$ — некоторый базис в V. Набор векторов вида $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_m}$, где $1 \le i_1 < \cdots < i_m \le n$, образует базис в $\Lambda^m V$. Обозначим $\Omega = \{1, \dots, n\}$. Для всякого подмножества $I \subseteq \Omega$ такого, что $|I| = m$, запишем $I = \{i_1, \dots, i_m\}$, где $i_1 < \cdots < i_m$ и обозначим $e_I = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_m}$. Таким образом, $(e_I)_{I \subseteq \Omega, |I|=m}$ — базис пространства $\Lambda^m V$. Координаты элемента $\Lambda^m(V)$ в этом базисе называются его **плюккеровыми координатами**.

Итак, сопоставление $W \mapsto \Lambda^m W$ определяет отображение $\mathrm{Gr}(V, m) \mapsto P(\Lambda^m V)$. Нетрудно понять, что это отображение инъективно. Покажем, что его образ выделяется (квадратичными) уравнениями. Для этого сначала заметим, что прямая сумма всех $\Lambda^i(V)$ $(0 \le i \le n)$ естественным образом снабжается структурой (градуированной) k-алгебры. Действительно, зададим отображение $\Lambda^i(V) \oplus \Lambda^j(V) \to \Lambda^{i+j}(V)$ на разложимых тензорах формулой $(v_1 \wedge \cdots \wedge v_i, v_{i+1} \wedge \cdots \wedge v_{i+j}) \mapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_i \wedge v_{i+1} \wedge \cdots \wedge v_{i+j}$ и продолжим по линейности. Конечно, эта операция обозначается через $\wedge$.

Нам нужно определить, когда элемент $w \in \Lambda^m(V)$ лежит в $\Lambda^m(W)$ для некоторого подпространства $W \le V$ размерности m.

Лемма 3.4.1. *Пусть $w \in \Lambda^m(V)$ — ненулевой элемент. Рассмотрим отображение $f\colon V \mapsto \Lambda^{r+1}(V)$, $v \mapsto v \wedge w$. Размерность ядра этого отображения не превосходит m. Более того, $\mathrm{Ker}(f)$ имеет размерность m тогда и только тогда, когда $w \in \Lambda^r(W)$ для некоторого m-мерного подпространства $W \le V$.*

Доказательство. Пусть $w \in \Lambda^r(W)$; выберем $\{e_i\}_{1\le i\le n}$ — базис V такой, что

$$W = \langle e_1, \dots, e_m\rangle.$$

После домножения на константу можно считать, что $e_1 \wedge \dots \wedge e_m = w$. Пусть $v = \sum x_i e_i \in \mathrm{Ker}(f)$; это равносильно тому, что $x_i = 0$ при всех $i > m$, откуда $\mathrm{Ker}(f) = W$.

Обратно, если ядро содержит m-мерное подпространство $W \le V$, выберем базис как выше. Запишем $w = \sum_{I\subseteq\Omega,|I|=m} x_I e_I$. Легко видеть, что если $e_j \wedge w = 0$, то $x_I = 0$ для $I \not\ni j$. Мы предположили, что $e_j \wedge w = 0$ для всех $j \le m$, поэтому единственный ненулевой коэффициент в разложении w соответствует $I = \{1, \dots, m\}$, и поэтому $w \in \Lambda^m(W)$. Из этого также немедленно следует, что $\dim \mathrm{Ker}(f) \le m$. □

Из этой леммы уже следует, что грассманиан является замкнутым подмногообразием в $P(\Lambda^m(V))$. Действительно, элементы вида $\Lambda^m(V)$ выделяются условием $\dim \mathrm{Ker}(f) \ge r$, что равносильно тому, что ранг матрицы отображения f не превосходит $n-r$, что в свою очередь равносильно обращению в нуль некоторого набора миноров этой матрицы. Сейчас мы явно укажем *квадратичные* уравнения на грассманиан; они называются **уравнениями Плюккера**, и описываются в [почти] любой книге по алгебраической геометрии.

Пусть A, B — два подмножества индексного множества Ω, $|A| = m-1$, $|B| = m+1$. Напомним, что любой элемент $\Lambda^m(V)$ имеет вид $\sum_I x_I e_I$, где суммирование ведется по подмножествам $I \subseteq \Omega$ таким, что $|I| = m$. Уравнение Плюккера, соответствующее паре (A, B), имеет вид

$$\sum_{b\in B} \pm x_{A\cup\{b\}} x_{B\setminus\{b\}} = 0.$$

Уточним знаки в этом уравнении: запишем $A = \{a_1, \dots, a_{m-1}\}$, где $a_1 < \dots < a_{m-1}$; в выражении $x_{A\cup\{b\}}$ возникает множество $A \cup \{b\}$. Может случиться, что $b \in A$, и тогда в этом множестве $m-1$ элемент; в этом случае соответствующее слагаемое в сумме пропускается. Если же $b \notin A$, запишем последовательность $a_1, \dots, a_{m-1}, b$ и переставим ее так, чтобы числа шли в порядке возрастания; знак этой перестановки и ставится перед соответствующим слагаемым.

Например, если $n = 4$, $m = 2$, имеется единственное (с точностью до знака) нетривиальное уравнение Плюккера: $x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23} = 0$.

4 Дифференциальные операторы и формы

4.1 Векторные поля

Пусть U — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Линейным дифференциальным оператором естественно называть оператор D на алгебре $C^\infty(U)$ вида $f \mapsto \sum_{i=1}^n \varphi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$. Нетрудно видеть, что такой оператора действительно $\mathbb{R}$-линеен и, кроме того, удовлетворяет **тождеству Лейбница** $D(fg) = D(f)g + fD(g)$. Именно это мы и возьмем за определение дифференциального оператора на многообразии.

Определение 4.1.1. Пусть A — алгебра над полем k. Отображение $D\colon A \to A$ называется **k-дифференцированием** алгебры A (или просто **дифференцированием**, когда поле ясно из контекста), если оно k-линейно и $D(fg) = D(f)g + fD(g)$ для любых $f, g \in A$. Нетрудно видеть, что все дифференцирования алгебры A образуют векторное пространство над k; оно обозначается через $\mathrm{Der}_k(A)$.

Упражнение 4.1.2. *Докажите, что если D — k-дифференцирование алгебры A, то $D(\lambda) = 0$ для любого $\lambda \in k$.*

Упражнение 4.1.3. *Пусть $[K : k]$ — конечное расширение полей нулевой характеристики. Найдите пространство $\mathrm{Der}_k(K)$. Что происходит для полей положительной характеристики?*

Упражнение 4.1.4. *Надйте пространство $\mathrm{Der}_k(k[\varepsilon]/\varepsilon^2)$.*

Упражнение 4.1.5. *Пусть $D \in \mathrm{Der}_k(R)$, $I \trianglelefteq R$. Докажите, что $D(I^k) \subseteq I^{k-1}$.*

Еще одна точка зрения на дифференциальный оператор: представим, что многообразие M вложено в $\mathbb{R}^n$ и выберем в каждой точке M касательный вектор к M так, чтобы он «гладко» зависел от точки. Тогда для гладкой функции f на M можно брать в каждой точке M производную функции f в направлении выбранного касательного вектора. Если $M = U$ — открытое подмножество, вложенное в $\mathbb{R}^n$, то касательное пространство к M в каждой точке отождествляется с $\mathbb{R}^n$, и касательный вектор в точке $x \in M$ раскладывается по стандартному базису (e_i); коэффициент этого разложения при e_i обозначим через $\varphi_i(x)$. Таким образом, эта точка зрения эквивалентна старой.

Предложение 4.1.6. *Пусть D — дифференцирование на $\mathbb{R}$-алгебре [глобальных] гладких функций на многообразии M. Тогда значение Df на любом открытом множестве V зависит только от ограничения f на V*

Доказательство. Пусть $x \in V$. Если $f = g$ на V, то можно выбрать гладкую функцию φ на M, равную 1 в некоторой меньшей окрестности точки x и нулю вне V. Тогда $\varphi(f - g) = 0$. Применяя D и пользуясь тождеством Лейбница, получаем $(D\varphi)(f - g) + \varphi D(f - g) = 0$. На V имеем $\varphi D(f - g) = 0$, поэтому $D(f) - D(g) = D(f - g) = 0$ в окрестности точки x. В силу произвольности выбора x, утверждение доказано. $\square$

Из доказанного утверждения немедленно следует, что для многообразия $(M, \mathcal{A})$ любое $\mathbb{R}$-дифференцирование $\mathcal{A}(M) \to \mathcal{A}(M)$, определяет гомоморфизм пучков $\mathbb{R}$-векторных пространств $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Обратно, гомоморфизм пучков $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ определяет, среди прочего, гомоморфизм глобальных сечений $\mathcal{A}(M) \to \mathcal{A}(M)$. Легко видеть, что мы получили взаимно однозначное соответствие между дифференцированиями алгебры гладких функций на M и гомоморфизмами пучков, удовлетворяющими тождеству Лейбница.

Следующее предложение показывает, что понятие дифференцирования алгебры гладких функций действительно обобщает наивное (координатное) представление о линейных дифференциальных операторах.

Предложение 4.1.7. *Пусть U — открытое подмногообразие $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{A}$ —структурный пучок на U. Если $D\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ — гомоморфизм пучков $\mathbb{R}$-векторных пространств, удовлетворяющий тождеству Лейбница, то D имеет вид $f \mapsto \sum \varphi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ для некоторых гладких функций φ_i на U.*

Доказательство. Если $D = \sum \varphi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, то, применяя D к функциями x_i, видим, что $\varphi_i = D(x_i)$. Поэтому достаточно доказать, что $D - \sum (Dx_i) \frac{\partial}{\partial x_i} = 0$. Заменяя D на указанную разность, получаем, что остается доказать, что из $Dx_i = 0$ для всех i следует, что $D = 0$.

Пусть $a = (a_1, \ldots, a_n) \in U$ и f — гладкая функция в некоторой окрестности a. Поверим на минутку, что f можно записать в виде суммы $f = f(a) + \sum (x_i - a) g_i$ в некоторой окрестности a, где g_i — гладкие функции. Тогда $D(f) = \sum (x_i - a_i) D(g_i)$; но в точке a функция $x_i - a_i$ равна нулю, поэтому $(Df)(a) = 0$. В силу произвольности выбора $a \in U$ получаем, что $Df = 0$.

Остается доказать, что $f = f(a) + \sum (x_i - a) g_i$. Действительно,

$$
\begin{aligned}
f(x) - f(a) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \left(f(tx + (1-t)a) \right) dt \\
&= \int_0^1 \sum \frac{\partial}{\partial x_i} f(tx + (1-t)a) \cdot \frac{d}{dt} (t x_i + (1-t) a_i) dt \\
&= \sum (x_i - a_i) \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} f(tx + (1-t)a) dt.
\end{aligned}
$$

□

Определение 4.1.8. Пусть $(M, \mathcal{A})$ — многообразие. Дифференцирование алгебры $\mathcal{A}(M)$ называется **однородным дифференциальным оператором первого порядка** или **векторным полем** на M. Эквивалентно, это гомоморфизм пучков $\mathcal{R}$-пространств $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$, удовлетворяющий тождеству Лейбница.

Обозначим через $\mathcal{T}(M)$ множество всех однородных дифференциальных операторов первого порядка. Во-первых, это множество обладает структурой векторного пространства: Для $D_1, D_2 \in \mathcal{T}(M)$ определим $(D_1 + D_2)(\varphi) = D_1 \varphi + D_2 \varphi$ для всех $\varphi \in \mathcal{A}(M)$; нетрудно видеть, что $D_1 + D_2$ является дифференцированием.

Далее, если $f \in \mathcal{A}(M)$, можно определить дифференцирование fD формулой $(fD)(\varphi) = fD\varphi$ для всех $\varphi \in \mathcal{A}(M)$. Поэтому $\mathcal{T}(M)$ является $\mathcal{A}(M)$-модулем.

Наконец, если $D_1, D_2 \in \mathcal{T}(M)$, можно определить оператор $[D_1, D_2]$ формулой

$$[D_1, D_2](\varphi) = D_1(D_2(\varphi)) - D_2(D_1(\varphi));$$

нетрудно проверить, что $[D_1, D_2]$ является дифференцированием. Мы будем называть эту операцию **скобкой**. Наконец, поскольку $D \in \mathcal{T}(M)$ можно рассматривать как гомоморфизм пучков $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$, для открытых подмножеств $V \subseteq U$ в M определено отображение ограничения $\mathcal{T}(U) \to \mathcal{T}(V)$; поэтому сопоставление $U \mapsto \mathcal{T}(U)$ является пучком. Этот пучок мы будем обозначать через $\mathcal{T}$.

Определение 4.1.9. Алгеброй Ли над коммутативным кольцом k называется k-модуль V вместе с k-билинейной бинарной операцией $V \times V \to V$, $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ (называемой **скобкой Ли**), удовлетворяющей условиям

1. $[X, X] = 0$,

2. (Тождество Якоби) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

для всех $X, Y, Z \in V$. **Гомоморфизмом** алгебр Ли называется k-билинейное отображение $f \colon V \to W$, сохраняющее скобку Ли; то есть, такое, что $f([X, Y]) = [f(X), f(Y)]$ для всех $X, Y \in V$.

Пример 4.1.10. Пусть A — ассоциативная алгебра над k. Определим $[x, y] = xy - yx$ для $x, y \in A$. Эта операция превращает A в алгебру Ли. Например, пространство матриц $M(n, k)$ размера $n \times n$ над полем k (или, более абстрактно, пространство $\mathrm{End}(V)$ эндоморфизмов векторного пространства над k) является алгеброй Ли над k.

Определение 4.1.11. Алгебра Ли называется **абелевой**, если $[x, y] = 0$ для любых x, y из этой алгебры.

Пример 4.1.12. Пространство $\mathrm{Der}_k(A)$ всех дифференцирований ассоциативной алгебры образует алгебру Ли относительно операции $[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$ для любых двух дифференцирований D_1, D_2.

Итак, мы получили, что пространство однородных дифференциальных операторов первого порядка на многообразии естественным образом снабжается структурой алгебры Ли над $\mathbb{R}$. Заметим, что $\mathcal{T}(M)$ является алгеброй Ли над $\mathbb{R}$ и модулем над $\mathcal{A}(M)$, но *не является* алгеброй Ли над $\mathcal{A}(M)$. Действительно,

$$\begin{aligned}[D_1, fD_2](\varphi) &= D_1(f(D_2\varphi)) - (fD_2)(D_1(\varphi)) \\ &= D_1 f \cdot D_2\varphi + fD_1(D_2\varphi) - fD_2(D_1\varphi) \\ &= (D_1 f \cdot D_2 + f[D_1, D_2])(\varphi).\end{aligned}$$

Очевидно, что для открытых подмножеств $V \subseteq U$ ограничения $\mathcal{T}(U) \to \mathcal{T}(V)$ являются гомоморфизмами алгебр Ли, поэтому $\mathcal{T}$ является пучком вещественных алгебр Ли. Кроме этого, $\mathcal{T}(U)$ снабжено структурой модуля над $\mathcal{A}(U)$, а $\mathcal{T}(V)$ — структурой модуля над $\mathcal{A}(V)$. При этом диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}(U) \times \mathcal{T}(U) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{T}(U) \arrow[d] \\ \mathcal{A}(V) \times \mathcal{T}(V) \arrow[r] & \mathcal{T}(V) \end{tikzcd}$$

коммутативна. Это означает, что $\mathcal{T}$ является пучком $\mathcal{A}$-модулей. многообразия M.

Определение 4.1.13. Пусть $\mathcal{A}$ — пучок колец на топологическом пространстве X, $\mathcal{M}$ — пучок абелевых групп на X, и для каждого открытого $U \subseteq X$ группа $\mathcal{M}(U)$ наделена структурой $\mathcal{A}(U)$-модуля. Предположим, что $\mathrm{res}_{UV}(am) = (\mathrm{res}_{UV}\, a)(\mathrm{res}_{UV}(m))$ для всех $a \in \mathcal{A}(U)$, $m \in \mathcal{M}(U)$ и открытых $V \subseteq U$. Тогда мы говорим, что $\mathcal{M}$ является **пучком $\mathcal{A}$-модулей**, или просто **$\mathcal{A}$-модулем**. **Гомоморфизмом $\mathcal{A}$-модулей** называется гомоморфизм f пучков абелевых групп, все компоненты f_U которого являются $\mathcal{A}(U)$-линейными отображениями.

Примеры 4.1.14.

1. Мы видели, что для многообразия $(M, \mathcal{A})$ пучок $\mathcal{T}$ является пучком $\mathcal{A}$-модулей. Он называется **касательным пучком** многообразия M.

2. Для любого натурального n пучок $\mathcal{A}^n$ является пучком $\mathcal{A}$-модулей (здесь $\mathcal{A}$ — любой пучок колец).

3. Пусть $(M, \mathcal{A})$ — гладкое многообразие, $Z \subseteq M$ — замкнутое подмножество. Сопоставим каждому открытому $U \subseteq M$ множество $\{f \in \mathcal{A}(U) \mid f|_{Z\cap U} = 0\}$. Это сопоставление является пучком $\mathcal{A}$-модулей, который обозначается через $\mathcal{I}_Z$ и называется **пучком идеалов** Z в M.

4.2 Локально свободные пучки и векторные расслоения

Предложение 4.1.7 показывает, что пучок $\mathcal{T}$ локально устроен очень просто: если U — координатная окрестность, то пучок $\mathcal{T}|_U$ изоморфен $\mathcal{A}^n|_U$; элементу $(a_i) \in (\mathcal{A}|_U)^n = \mathcal{A}^n|_U$ при этом изоморфизме сопоставляется оператор $\sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Определение 4.2.1. Пусть $\mathcal{A}$ — пучок колец на топологическом пространстве X. $\mathcal{A}$-модуль $\mathcal{M}$ называется **локально свободным $\mathcal{A}$-модулем ранга** n, если у каждой точки $x \in X$ существует открытая окрестность U такая, что $\mathcal{M}|_U \cong \mathcal{A}^n|_U$ как $\mathcal{A}|_U$-модуль.

Напомним, что сечения структурного пучка $\mathcal{A}$ многообразия M над открытым множеством U — это просто гладкие функции на U. Поэтому сечения $\mathcal{A}$-модуля $\mathcal{A}^n$ естественно называть *вектор-функциями*. Сейчас мы увидим, что сечения любого локально свободного пучка $\mathcal{E}$ можно считать некоторыми функциями. Пусть $x \in M$. Напомним, что через $\mathcal{A}_x$ мы обозначили кольцо ростков гладких функций в точке x. Пусть $\mathcal{M}_x \trianglelefteq \mathcal{A}_x$ — идеал в $\mathcal{A}_x$, состоящий из ростков функций, обращающихся в 0 в точке x. Гомоморфизм эвалюоации $\mathrm{ev}_x\colon \mathcal{A}_x \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(x)$, устанавливает изоморфизм между $\mathcal{A}_x/\mathcal{M}_x$ и $\mathbb{R}$. Поэтому удобно считать, что гомоморфизм эвалюоации принимает значения не в $\mathbb{R}$, а в пространстве $\mathcal{A}_x/\mathcal{M}_x$, которое меняется с точкой x.

Рассмотрим теперь для локально свободного пучка $\mathcal{E}$ и точки $x \in M$ векторное пространство (над $\mathbb{R}$) $\mathcal{E}_x/\mathcal{M}_x\mathcal{E}_x$ и назовем значением элемента слоя $\mathcal{E}_x$ в точке x его образ в $\mathcal{E}_x/\mathcal{M}_x\mathcal{E}_x$. Таким образом, можно назвать значением сечения $f \in \mathcal{E}(U)$ в точке $x \in U$ образ этого сечения при композиции отображений $\mathcal{E}(U) \to \mathcal{E}_x \to \mathcal{E}_x/\mathcal{M}_x\mathcal{E}_x$. Важное отличие этого случая от частного случая $\mathcal{E} = \mathcal{A}$ состоит в том, что векторное пространство $E_x = \mathcal{E}_x/\mathcal{M}_x\mathcal{E}_x$ зависит от точки $x \in M$: между пространствами E_x и E_y для различных точек x, y нет естественного изоморфизма.

Ранее мы видели, что любой пучок является пучком непрерывных сечений некоторого расслоения; это расслоение, как правило, не хаусдорфово. Сейчас мы покажем, что любой локально свободный пучок $\mathcal{A}$-модулей является пучком гладких сечений некоторого гладкого векторного расслоения.

Рассмотрим объединение всех пространств E_x, $E = \cup_{x\in M} E_x$, вместе с естественной проекцией $\pi\colon E \to M$, для которой $\pi^{-1}(x) = E_x$. По предположению у каждой точки $x \in M$ есть открытая окрестность U такая, что пучок $\mathcal{E}|_U$ изоморфен $\mathcal{A}^n$. поэтому $\pi^{-1}(U)$ можно отождествить с $U \times \mathbb{R}^n$, и при этом отображение $\pi^{-1}(U) \to U$ отождествится с проекцией $U \times \mathbb{R}^n \to U$. Поэтому $\pi^{-1}(U)$ можно наделить структурой гладкого многообразия, перенеся ее с $U \times \mathbb{R}^n$. Эта структура не зависит от выбора изоморфизма $\mathcal{E}|_U \to \mathcal{A}^n$, и можно склеить их в структуру гладкого многообразия на всем множестве E; нетрудно проверить, что E станет хаусдорфовым пространством со счетной базой.

Определение 4.2.2. Пусть E, M — гладкие многообразия. Гладкое отображение $\pi\colon E \to M$ называется **гладким векторным расслоением ранга** n, если на каждом слое $\pi^{-1}(x)$, $x \in M$, задана структура векторного пространства над $\mathbb{R}$ таким образом, что у любой точки $x \in M$ есть открытая окрестность U с диффеоморфизмом $\pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ над U, индуцирующим на каждом слое $\pi^{-1}(x)$ линейное отображение $\pi^{-1}(x) \to \mathbb{R}^n$. **Гомоморфизмом** векторных расслоений над M называется гладкое отображение, согласованное со структурными проекциями в M, для которого все индуцированные отображения на слоях линейны.

Таким образом, по каждому локально свободному пучку $\mathcal{A}$-модулей $\mathcal{E}$ мы построили гладкое векторное расслоение $E \to M$. Обратно, если $\pi\colon E \to M$ — гладкое векторное расслоение, то пучок гладких сечений проекции π является локально свободным пучком $\mathcal{A}$-модулей. Несложно понять, что имеется и естественная биекция между $\mathcal{A}$-линейными гомоморфизмами локально свободных пучков $\mathcal{A}$-модулей и гомоморфизмами соответствующих им векторных расслоений. Поэтому категории локально свободных пучков $\mathcal{A}$-модулей и гладких векторных расслоений над M эквивалентны.

Пусть $\varphi\colon M \to M'$ — гладкое отображение, $\pi\colon E \to M$ — гладкое векторное расслоение на M'. Определим гладкое векторное расслоение φ^*E, называемой **пулбэком** расслоения E:

рассмотрим подпространство $\varphi^*E = \{(m,x) \in M \times E \colon \varphi(m) = \pi(x)\}$ в $E \times M$. Очевидно, что это хаусдорфово пространство со счетной базой, снабженное отображениями $\pi' \colon \varphi^*E \to M$, $(m,x) \mapsto m$ и $\tilde{\varphi} \colon \varphi^*E \to E$, $(m,x) \mapsto x$. Если U — открытое подмножество M', над которым расслоение E тривиально, то над $V = \varphi^{-1}(U)$ расслоение $\pi'^{-1}(V)$ тривиально; в частности, φ^*E — гладкое многообразие, π' — гладкое отображение, и слой $\pi'^{-1}(x)$ над точкой $x \in M$ отождествляется со слоем $\pi^{-1}(\varphi(x))$ над точкой $\varphi(x) \in M'$, и поэтому наделяется естественной структурой векторного пространства. Все это приводит к тому, что φ^*E — гладкое векторное расслоение на M.

Вернемся к нашему главному примеру — касательному пучку $\mathcal{T}$ многообразия M. Применяя к нему описанную выше конструкцию, получаем гладкое векторное расслоение, которое мы будем обозначать через $T = TM$ и называть **касательным расслоением** многообразия M.

Слой T_p расслоения T над точкой $p \in M$ называется **касательным пространством** к M в p. Векторное поле X в окрестности точки p (или, что то же самое, сечение касательного расслоения) определяет некоторый элемент слоя T_p, который мы будем обозначать через X_p. На него можно смотреть так: дифференцирование X пучка $\mathcal{A}$ определяет отображение на слоях $\mathcal{A}_p \to \mathcal{A}_p$. Рассмотрим композицию этого отображения с гомоморфизмом эвалюации $A_p \to \mathbb{R}$, сопоставляющим ростку функции в точке p ее значение в p. Полученное отображение $t \colon \mathcal{A}_p \to \mathbb{R}$ является дифференцированием; точнее, для него выполняется следующий вариант тождества Лейбница: $t(fg) = t(f)g(p) + t(g)f(p)$. Нетрудно проверить, что с помощью этого соответствия можно отождествить касательное пространство в точке p с множеством линейных отображений $\mathcal{A}_p \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих указанному свойству.

Например, если $M = \mathbb{R}^n$, то касательное расслоение к M тривиально, и касательное пространство в каждой точке $p \in M$ канонически отождествляется с $\mathbb{R}^n$. А именно, каждому вектору $v \in \mathbb{R}^n$ соответствует дифференцирование $\partial_v \colon \mathcal{A}_p \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv)-f(x)}{t}$. Если теперь N — подмногообразие в $\mathbb{R}^n$, то касательное расслоение к N окажется подрасслоением в тривиальном расслоении $M \times \mathbb{R}^n$; в частности, касательное пространство в каждой точке $p \in N$ окажется подпространством в $\mathbb{R}^n$; геометрически это подпространство, параллельное аффинному подпространству, касательному к N в точке p.

4.3 Дифференциал гладкого отображения

Пусть $\varphi \colon M \to M'$ — гладкое отображение многообразий, и $t \colon \mathcal{A}_p \to \mathbb{R}$ — касательный вектор к M в точке $p \in M$. Определим касательный вектор $\varphi(t)$ в точке $\varphi(p)$ следующим образом: $\varphi(t)(f) = t(f \circ \varphi)$ для всех $f \in \mathcal{A}_{\varphi(p)}$. Получаем линейное отображение $T_p(M) \to T_{\varphi(p)}(M')$, называемое **дифференциалом** φ. Собирая эти отображения для всех точек $p \in M$, получаем гомоморфизм гладких векторных расслоений $TM \to \varphi^*TM'$ или, что то же самое, гомоморфизм пучков $\mathcal{T}(M) \to \varphi^*(\mathcal{T}(M'))$. Эти гомоморфизмы обычно обозначаются через $d\varphi$.

Выясним, как дифференциал выглядит в координатах: если U и V — координатные окрестности точек x и $\varphi(x)$ в M и M' соответственно, и $\varphi(U) \subseteq V$, то φ задается гладкими функциями $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$. Дифференциал переводит касательный вектор $\frac{\partial}{\partial x_k}$ в касательный вектор в точке $\varphi(p)$, который на координатных функциях действует так: $y_j \mapsto \frac{\partial}{\partial x_k}(\varphi_j(x))$. То есть, дифференциал φ переводит $\frac{\partial}{\partial x_k}$ в $\sum \frac{\partial}{\partial x_k}(\varphi_j(x))\frac{\partial}{\partial y_j}$. Иными словами, матрица линейного отображения $T_p \to T_{\varphi(p)}$ в выбранных базисах составлена из $\frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi_j)$. Эта матрица называется **якобианом** отображения φ.

Например, если f — гладкая функция на M, то есть, гладкое отображение $M \to \mathbb{R}$, то df является морфизмом $TM \to f^*(T\mathbb{R})$. Но расслоение $T\mathbb{R}$ тривиально и каждое касательное пространство к $\mathbb{R}$ канонически отождествляется с $\mathbb{R}$. Поэтому df можно рассматривать как гомоморфизм из TM в тривиальное расслоение ранга 1 или, что то же самое, как сечение двойственного векторного расслоения.

Предположим теперь, что $f\colon N \to M$ — гладкое отображение многообразий такое, что df инъективно во всех точках N. Это означает, что TN является подрасслоением в f^*TM. Коядро этого вложения называется **нормальным расслоением** N в M. Получаем точную последовательность векторных расслоений:

$$0 \longrightarrow TN \longrightarrow f^*TM \longrightarrow \mathrm{Nor}(N, M) \longrightarrow 0$$

Если, кроме того, f инъективно, то $N \to M$ — иммерсия. Например, если N — замкнутое подмногообразие в $\mathbb{R}^n$, то касательное пространство в точке $p \in N$ является подпространством в $\mathbb{R}^n$, а нормальное пространство — фактор по этому подпространству; его можно отождествить с ортогональным подпространством при наличии эвклидового скалярного произведения на $\mathbb{R}^n$

Определение 4.3.1. Если дифференциал гладкого отображения $f\colon N \to M$ является изоморфизмом во всех точках N, f называется **этальным** отображением.

Пример 4.3.2. Отображение $\mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto \exp(2\pi i t)$, является этальным.

4.4 Поток векторного поля

Опишем еще один взгляд на дифференцирования в $\mathbb{R}^n$. Пусть $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Для всякого $t \in \mathbb{R}$ определим отображением $\varphi_t\colon (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1+ta_1, \dots, x_n+ta_n)$ пространства $\mathbb{R}^n$ в себя. Это гомоморфизм аддитивной группы $\mathbb{R}$ в группу диффеоморфизмов многообразия $\mathbb{R}^n$. Определим дифференциальный оператор D_a формулой $(D_a(f))(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\varphi_t(x))-f(x)}{t}$. Нетрудно видеть, что $D = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Эту идею можно обобщить на произвольные многообразия.

Определение 4.4.1. Пусть (φ_t), $t \in \mathbb{R}$ — набор диффеоморфизмов M, удовлетворяющих следующим условиям:

1. отображение $\mathbb{R} \times M \to M$, $(t, x) \mapsto \varphi_t(x)$ является гладким;
2. отображение $\varphi_0\colon M \to M$ совпадает с id_M;
3. $\varphi_t \circ \varphi_{t'} = \varphi_{t+t'}$ для всех $t, t' \in \mathbb{R}$.

Тогда φ_t называется **однопараметрической группой диффеоморфизмов** M.

Каждая однопараметрическая группа диффеоморфизмов определяет дифференцирование функций X_φ: его значение на функции f равно функции $x \mapsto \lim_{t\to 0} \frac{f(\varphi_t(x))-f(x)}{t}$. Нетрудно видеть, что X_φ действительно является однородным дифференциальным оператором первого порядка.

Примеры 4.4.2. Пусть $M = R$.

1. $\varphi_t(x) = x + t$; соответствующий оператор равен $\frac{d}{dx}$.
2. $\varphi_t(x) = e^t x$; соответствующий оператор равен $x\frac{d}{dx}$.

3. $\varphi_t(x) = \frac{x}{1-tx}$. Нетрудно видеть, что $\varphi_t \circ \varphi_{t'} = \varphi_{t+t'}$. Однако, для всякого $x \neq 0$, $\varphi_t(x)$ определена только для $t < 1/x$. Это означает, что мы получили *локальную* однопараметрическую группу *локальных* диффеоморфизмов: для каждого x есть окрестность U и $\varepsilon > 0$ такие, что $\varphi_t(y)$ определена для $|t| < \varepsilon$ и $y \in U$. При этом условие $\varphi_t \circ \varphi_{t'} = \varphi_{t+t'}$ выполняется для тех t, t', для которых эта запись имеет смысл. Тем не менее, и в случае локальной однопараметрической группы можно определить соответствующее векторное поле.

Итак, с каждой [локальной] однопараметрической группой мы связали векторное поле. Установим обратное соответствие.

Теорема 4.4.3. *Пусть X — векторное поле на гладком многообразии M. Тогда у каждой точки $x \in M$ есть открытая окрестность U, $\varepsilon > 0$ и отображения $\varphi_t\colon U \to M$ для $|t| < \varepsilon$ такие, что*

1. *отображение $(-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to M$, $(t, y) \mapsto \varphi_t(y)$, является гладким;*

2. *отображение $\varphi_0\colon U \to M$ совпадает с вложением U в M;*

3. *$(\varphi_t \circ \varphi_{t'})(y) = \varphi_{t+t'}(y)$, если $|t|, |t'|, |t + t'| < \varepsilon$, $y, \varphi_t'(y) \in U$;*

4. *$X_\varphi = X$.*

Доказательство этой теоремы несложно; в силу локальности вопрос сводится к открытому множеству в $\mathbb{R}^n$, где нужно воспользоваться теоремой о существовании (и единственности) решения некоторого дифференциального уравнения. Таким образом, альтернативой термину «вектоное поле» может служить термин «инфинитезимальное преобразование».

Определение 4.4.4. Однопараметрическая группа, ассоциированная с векторным полем, называется **потоком** векторного поля.

4.5 Дифференциальные формы

Обычные операции над векторными пространствами переносятся на векторные расслоения. Например, если E и F — гладкие векторные расслоения над многообразием M, можно определить их прямую сумму $E \oplus F$ следующим образом: рассмотрим множество $E \oplus F = \bigcup_{x \in M} E_x \oplus F_x$. Для того, чтобы определить на нем структуру гладкого многообразия, заметим, что, когда x пробегает небольшую окрестность U, объединение $\bigcup_{x \in U} E_x \oplus F_x$ можно отождествить с $U \times (\mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^l)$ с помощью локальных тривиализаций расслоений E и F. Отождествляя далее $\mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^l$ с $\mathbb{R}^{k+l}$, получаем гладкую структуру на $\bigcup_{x \in U} E_x \oplus F_x$. Нетрудно видеть, что эти структуры не зависят от конкретного выбора локальных тривиализаций, поэтому их можно склеить в гладкую структуру на $E \oplus F$. Кроме того, $E \oplus F$ снабжено канонической проекцией на M, поэтому мы получаем векторное расслоение. Совершенно аналогичным образом определяются двойственное векторное расслоение E, тензорное произведение $E \otimes F$, а также тензорные, внешние и симметрические степени векторных расслоений. Более того, для расслоения E можно определить расслоение $\operatorname{End}(E)$ формулой $\operatorname{End}(E) = E^* \otimes E$.

Множество геометрических объектов на многообразии M описываются сечениями каких-то векторных расслоений, обычно тензорных или внешних степеней касательного или кокасательного расслоения на M.

Определение 4.5.1. Сечения кокасательного расслоения на M называются **дифференциальными формами степени** 1, или просто 1-**формами**. Сечения p-ой внешней степени $\Lambda^p(T^*)$ называются **дифференциальными формами степени** p, или p-**формами**. Таким образом, дифференциальную форму степени p можно воспринимать как альтернированную $\mathcal{A}(M)$-мультилинейную форму степени p на пространстве векторных полей. В этой интерпретации естественным образом определенное **внешнее произведение** дифференциальных форм α, β (степеней p, q соответственно) выглядит так:

$$(\alpha \wedge \beta)(X_1, \ldots, X_{p+q}) = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(p)})\beta(X_{\sigma(p+1)}, \ldots, X_{\sigma(p+q)}),$$

где σ пробегает перестановки множества $\{1, \ldots, p+q\}$, сохраняющие относительный порядок в подмножествах $\{1, \ldots, p\}$ и $\{p+1, \ldots, p+q\}$, то есть, для которых $\sigma(1) < \cdots < \sigma(p)$ и $\sigma(p+1) < \cdots < \sigma(p+q)$.

Итак, мы определили 1-форму как элемент расслоения, двойственному к касательному; в частности, 1-форма действует на векторных полях. Например, для любой гладкой функции f на M (или на некотором открытом подмножестве M) можно определить дифференциальную форму, обозначаемую через df, следующим образом: для любого векторного поля v положим $(df)(v) = v(f)$. Нетрудно видеть, что df действительно является $\mathcal{A}(M)$-линейным отображением, то есть, 1-формой. Эта форма называется **дифференциалом** функции f, или **внешней производной** f. Кроме того, сопоставление $f \mapsto df$ является $\mathbb{R}$-линейным отображением из $\mathcal{A}(M)$ в T^*M, и выполняется свойство Лейбница: $d(fg) = fd(g) + gd(f)$.

Теперь мы можем придать смысл загадочным выражениям типа $d\sin(x) = \cos(x)dx$ из обычных курсов математического анализа. Действительно, это просто равенство двух дифференциальных форм степени 1 на прямой. Для того, чтобы доказать его, достаточно проверить, что при подстановке любого векторного поля получается верное равенства. Любое векторное поле v на прямой имеет вид $v = f(x)\partial_x$, поэтому в левой части равенства после подстановки получаем

$$(d\sin(x))(v) = v\sin(x) = f(x)\partial_x \sin(x) = f(x)\cos(x),$$

а в правой части получаем

$$(\cos(x)dx)(v) = (\cos(x))v(x) = \cos(x)f(x)\partial_x x = \cos(x)f(x).$$

Векторное поле на M определяет касательный вектор в каждой точке M; совершенно аналогичным образом 1-форма на M определяет *кокасательный* вектор в каждой точке M. А именно, для точки $p \in M$ **кокасательным вектором** в точке p назовем элемент пространства $T_p^*M = (T_pM)^*$, то есть, линейное отображение из T_pM в $\mathbb{R}$. Теперь видно, что каждая 1-форма ω на M определяет кокасательный вектор $\omega_p \in T_p^*M$ следующим образом: для каждого векторного поля v на M положим $\omega_p(v_p) = \omega(v)(p)$. Нетрудно проверить, что это определение корректно: результат зависит только от v_p, а не от значения v в других точках; кроме того, 1-форма полностью определяется своими значениями во всех точках.

Если $\varphi\colon M \to N$ — гладкое отображение, $\varphi(p) = q$, мы определили отображение на касательных векторах $\varphi_*\colon T_pM \to T_qN$. Двойственное отображение обозначим через $\varphi^*\colon T_qN \to T_pM$; оно задает «пулбэк» кокасательных векторов из точки q в точку p. Кроме того, это отображение можно превратить в глобальный пулбэк дифференциальных 1-форм с N на M, склеив поточечные пулбэки.

Будем обозначать пространство 1-форм на M через $\Omega^1(M)$, а пространство всех дифференциальных форм на M — через $\Omega(M) = \Lambda^*(\Omega^1(M))$; при этом $\Omega^p(M) = \Lambda^p(\Omega^1(M))$ — пространство p-форм. Заметим, что $\Omega^p(M) = 0$ при $p > \dim(M)$.

Выше мы определили дифференциал функции $f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$ как некоторую 1-форму df. Продолжим эту операцию и определим отображение $d\colon \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$ для всех $p \geq 0$, называемое **внешней производной**, или **дифференциалом**, как единственное отображение, удовлетворяющее следующим свойствам:

1. $d\colon \Omega^0(M) \to \Omega^1(M)$ совпадает с ранее определенным отображением.
2. $d(\omega + \mu) = d\omega + d\mu$, $d(c\omega) = cd\omega$ для всех $\omega, \mu \in \Omega(M)$ и $c \in \mathbb{R}$.
3. $d(\omega \wedge \mu) = d\omega \wedge \mu + (-1)^p \omega \wedge d\mu$ для всех $\omega \in \Omega^p(M)$, $\mu \in \Omega(M)$.
4. $d(d\omega) = 0$ для всех $\omega \in \Omega(M)$.

Нетрудно видеть, что это свойства однозначно определяют внешнюю производную: для этого достаточно того факта, что любая 1-форма является локально конечной линейной комбинацией форм вида df (с коэффициентами из $\Omega^0(M)$.

Посмотрим на некоторые частные случаи, важные с точки зрения истории и приложений. Пусть $M = \mathbb{R}^3$. Отображение $d\colon \Omega^0(\mathbb{R}^3) \to \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ в литературе для инженеров называется *градиентом*, отображение $d\colon \Omega^1(\mathbb{R}^3) \to \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ — *ротором*, а отображение $d\colon \Omega^2(\mathbb{R}^3) \to \Omega^3(\mathbb{R}^3)$ — *дивергенцией*.

Другое определение внешней производной: пусть α — дифференциальная форма степени p. Тогда $d\alpha$ — дифференциальная форма степени $p+1$, задаваемая формулой

$$\begin{aligned} d\alpha(X_1, \ldots, X_{p+1}) = &\sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} X_i \alpha(X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_{p+1}) \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq p+1} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_{p+1}). \end{aligned}$$

Упражнение 4.5.2. *Докажите, что это определение эквивалентно предыдущему.*

Отображения d определяют комплекс пучков

$$0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{T}^* \to \Lambda^2 \mathcal{T}^* \to \ldots,$$

называемый **комплексом де Рама**. Он является точной последовательностью пучков во всех членах, кроме первого: ядро отображения $\mathcal{A} \to \mathcal{T}^*$ — постоянный пучок $\underline{\mathbb{R}}$ (доказательство этого факта несложно, но требует некоторой технической изощренности). В то же время, последовательность

$$0 \to \mathbb{R} \to \mathcal{A}(M) \to \mathcal{T}^*(M) \to *^2\mathcal{T}^*(M) \to \ldots$$

совершенно не обязана быть точной: вообще говоря, неверно, что если форма ω удовлетворяет равенству $d\omega = 0$, то она имеет вид $d\alpha$ для некоторой формы ω на единицу меньшего ранга.

Пример 4.5.3. Рассмотрим многообразие S^1 и дифференциальную форму $\omega = X\,dY - Y\,dX$, где X, Y — ограничения координатных функций с $\mathbb{R}^2$ на S^1. Очевидно, что $d\omega = 0$ (на S^1 вообще нет ненулевых форм степени 2). Однако, не существует функции f на S^1 такой, что $df = X\,dY - Y\,dX$. Действительно, локально на S^1 задана функция θ такая, что $X = \cos\theta$ и $Y = \sin\theta$; после подстановки в равенство для ω получаем $\omega = d\theta$. Если же, кроме того, $\omega = df$, то $d(f - \theta) = 0$, поэтому f отличается от θ на константу. В частности, локально заданную функцию θ можно продолжить на всю окружность S^1; хорошо известно, что это невозможно.

Таким образом, вопрос о точности комплекса, полученного из комплекса де Рама взятием глобальных сечений, связан с топологией многообразия M; отметим, что это в точности тот же вопрос, который у нас возникал в связи с точными последовательностями пучков ранее.

4.6 Метрика и звездочка Ходжа

Напомним, что **(полу-римановой) метрикой** на векторном пространстве V называется билинейное симметричное невырожденное отображение $g\colon V \times V \to \mathbb{R}$. Невырожденность здесь означает, что если $g(v, w) = 0$ для всех $w \in V$, то $v = 0$. При этом метрика называется **римановой**, если форма g положительно определена, то есть, имеет сигнатуру $(n, 0)$ (напомним, что каждую билинейную симметричную форму можно привести к диагональному виду; количество положительных и отрицательных коэффициентов в этом виде инвариантно и называется *сигнатурой* этой формы). Метрика называется **лоренцевой**, если она имеет сигнатуру $(n-1, 1)$.

Перенесем определение метрики на многообразие: **метрикой** g на многообразии M называется набор метрик g_p на касательных пространствах T_pM для всех точек $p \in M$, гладко меняющийся в зависимости от p. Последнее условие означает, что для любых гладких векторных полей v, w на M произведение $g_p(v_p, w_p)$ является гладкой функцией на M.

Нетрудно видеть, что из условия гладкости следует постоянность сигнатуры формы g_p на связных компонентах M; в дальнейшем нас в основном будут интересовать многообразия с метриками постоянной сигнатуры. Если сигнатура g_p имеет вид $(n, 0)$ или $(n-1, 1)$, метрика g называется **римановой** или **лоренцевой** соответственно. **Полу-римановым (римановым, лоренцевым) многообразием** называется многообразие с фиксированной метрикой (римановой метрикой, лоренцевой метрикой).

Наличие метрики на полу-римановом многообразии M позволяет нам зафиксировать изоморфизм между каждым касательным пространством T_pM и соответствующим кокасательным пространством T_p^*M. Благодаря этому мы можем расширить понятие метрики на дифференциальные формы: если $\omega, \mu \in \Omega^1(M)$, назовем **(скалярным) произведением** 1-форм ω, μ функцию $\langle \omega, \mu \rangle$, значение которой в точке $p \in M$ равно $g_p(v_p, w_p)$, где $v_p, w_p \in T_pM$ — касательные векторы, соответствующие кокасательным векторам $\omega_p, \mu_p \in T_p^*M$ при изоморфизме $T_pM \cong T_p^*M$. Это определение можно распространить на p-формы: достаточно определить скалярное произведение для двух форм $e_1 \wedge \dots \wedge e_p$ и $f_1 \wedge \dots \wedge f_p$, положив его равным определитель матрицы из скалярных произведений вида $\langle e_i, f_j \rangle$:

$$\langle e_1 \wedge \dots \wedge e_p, f_1 \wedge \dots \wedge f_p \rangle = \det(\langle e_i, f_j \rangle.$$

Пусть V — конечномерное векторное пространство. Для любых двух базисов V существует единственное линейное отображение $T\colon V \to V$, переводящее один базис в другой. Определитель этого преобразования отличен от нуля. Будем говорить, что базисы одинаково ориентированы, если этот определитель положителен, и что они противоположно ориентированы, если этот определитель отрицателен. Назовем **ориентацией** на V выбор класса эквивалентности базисов в V (считаем, что два базиса эквивалентны, если они одинаково ориентированы). На каждом ненулевом пространстве V имеется ровно две ориентации.

Еще один способ смотреть на ориентации: если $(e_1, \dots, e_n)$ — базис V, то $e_1 \wedge \dots \wedge e_n \in \Lambda^n V$ — ненулевой элемент, называемый **элементом объема**, ассоциированным с этим базисом. Нетрудно видеть, что пространство $\Lambda^n V$ одномерно, и если $(f_1, \dots, f_n)$ — еще один базис V, то $f_1 \wedge \dots \wedge f_n = (\det T) e_1 \wedge \dots \wedge e_n$, где T — матрица перехода между этими базисами. При этом два базиса одинаково ориентированы тогда и только тогда, когда $\det T$ положителен, то есть, когда соответствующие им элементы объема отличаются на положительный скалярный множитель.

Перейдем теперь к многообразиям: если M — многообразие размерности n, будем называть **формой объема** n-форму ω на M, если она нигде не обращается в 0, то есть, если для каждой точки $p \in M$ элемент $\omega_p \in T_p^*M$ является элементом объема. Многообразие называется **ориентируемым**, если на нем существует форма объема. **Ориентацией** на M

называется выбор класса эквивалентности форм объема на M, причем две формы объема ω, ω' называются эквивалентными, если $\omega' = f\omega$ для некоторой всюду положительной функции f. Например, на $\mathbb{R}^n$ существует **стандартная ориентация** — класс эквивалентности, содержащий форму объема $de_1 \wedge \dots \wedge de_n$. Таким образом, на многообразия с ориентаций мы можем сказать про любой базис любого кокасательного пространства, является ли он **правым** или **левым**: нужно записать соответствующий этому базису элемент объема и сравнить с элементом объема, приходящим из любого представителя выбранного класса эквивалентности.

Теперь предположим, что M — ориентированное n-мерное многообразие, на котором задана метрика g. Построим каноническую форму объема следующим образом: покроем M координатными окрестностями с учетом ориентации (то есть, выберем гомеоморфизмы $\varphi_\alpha \colon U_\alpha \to \mathbb{R}^n$, сохраняющие ориентацию) и положим

$$\mathrm{vol} = \sqrt{|\det g(\partial_\mu, \partial_\nu)|}\, de_1 \wedge \dots \wedge de_n.$$

Очевидно, что это форма объема на U_α. При этом, на пересечении $U_\alpha \cap U_\beta$ таким образом определенные формы совпадают: действительно, если T — матрица перехода между базисами для координатных окрестностей U_α и U_β, то определитель матрицы $g(\partial_\mu, \partial_\nu)$ умножается на $(\det T)^2$, поэтому построенная форма vol умножается на $\det T$ (здесь $\det T > 0$, поскольку мы выбрали координатные окрестности с учетом ориентации), что и означает замену базиса. Построенная форма объема vol на M называется формой объема, *ассоциированной* с метрикой g.

Пусть теперь M — n-мерное ориентированное полу-риманово многообразие. **Звездочкой Ходжа** называется единственное линейное отображение

$$\star \colon \Omega^p(M) \to \Omega^{n-p}(M)$$

такое, что для всех $\omega, \mu \in \Omega^p(M)$ выполнено $\omega \wedge \star\mu = \langle \omega, \mu \rangle\, \mathrm{vol}$. Несложно получить и явную координатную формулу для звездочки Ходжа. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — положительно ориентированный ортонормированный базис 1-форм в некоторой координатной окрестности, то есть, $\langle e_\mu, e_\nu \rangle = 0$ для $\mu \neq \nu$ и $\langle e_\mu, e_\nu \rangle = \varepsilon(\mu) = \pm 1$. Для $1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n$ (где все $i_1, \dots, i_p$ попарно различны) положим $\{i_{p+1}, \dots, i_n\} = \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_p\}$. Тогда

$$\star(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}) = \pm e_{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge e_{i_n},$$

где знак $\pm$ равен произведению $\varepsilon(i_1) \dots \varepsilon(i_p)$ на знак перестановки, переводящей $(1, \dots, n)$ в $(i_1, \dots, i_n)$.

Пример 4.6.1. Пусть dx, dy, dz — базис 1-форм на $\mathbb{R}^3$ со стандартной эвклидовой метрикой и ориентацией. Тогда

$$\star dx = dy \wedge dz, \quad \star dy = dz \wedge dx, \quad \star dz = dx \wedge dy$$

и

$$\star dx \wedge dy = dz, \quad \star dy \wedge dz = dx, \quad \star dx \wedge dx = dy.$$

Кроме того,

$$\star 1 = dx \wedge dy \wedge dz, \quad \star dx \wedge dy \wedge dz = 1.$$

Несложно видеть, что для двух 1-форм ω, μ на $\mathbb{R}^3$ их внешнее произведение является 2-формой (и определено даже без наличия метрики и ориентации), и звездочка Ходжа позволяет получить из нее 1-форму; в координатной записи оказывается, что она соответствует векторному произведению в $\mathbb{R}^3$.

Упражнение 4.6.2. *Пусть M — ориентированное полу-риманово многообразие размерности n и сигнатуры $(s, n-s)$. Докажите, что для p-формы ω выполнено*

$$\star(\star\omega) = (-1)^{p(n-p)+s}\omega.$$

5 Когомологии пучков

5.1 Инъективные пучки и когомологии

Пусть $\mathcal{F}' \to \mathcal{F}$, $\mathcal{F} \to \mathcal{F}''$ — гомоморфизмы пучков абелевых групп на топологическом пространстве X. Напомним, что последовательность $\mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}''$ называется *точной*, если последовательность $\mathcal{F}'_x \to \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}''_x$ точна для любой точки $x \in X$. Если $\mathcal{F}$ — подпучок пучка $\mathcal{G}$, можно определить фактор-пучок как пучок, ассоциированный с предпучком $U \mapsto \mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U)$.

Упражнение 5.1.1. *Рассмотрим постоянный пучок $\underline{\mathbb{Z}}$ на вещественной прямой $\mathbb{R}$. Пусть I — подпучок пучка $\underline{\mathbb{Z}}$, сопоставляющий открытому множеству $U \subseteq \mathbb{R}$ множество сечений, обращающихся в 0 в точках $0, 1 \in \mathbb{R}$. Покажите, что предпучок $U \mapsto \underline{\mathbb{Z}}(U)/I(U)$ не является пучком.*

Как мы видим, проблема возникает только с сюръективностью последовательности глобальных сечений. Из нашего анализа в разделе 2.3 следует, что функтор глобальных сечений точен слева:

Предложение 5.1.2. *Если $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}''$ — точная последовательность пучков абелевых групп на пространстве X, то индуцированная последовательность*

$$0 \to \mathcal{F}'(X) \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}''(X)$$

также является точной.

Когомологии пучков измеряют отклонение последовательности $0 \to \mathcal{F}'(X) \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}''(X) \to 0$ от точности.

Определение 5.1.3. Пучок модулей $\mathcal{F}$ над пучком колец $\mathcal{O}$ на пространстве X называется **инъективным**, если для любого подпучка $\mathcal{G}'$ пучка $\mathcal{G}$ любой гомоморфизм $\mathcal{G}' \to \mathcal{F}$ можно продолжить до гомоморфизма $\mathcal{G} \to \mathcal{F}$.

Определение 5.1.4. Пучок $\mathcal{F}$ абелевых групп называется **вялым** (соответственно, **мягким**), если любое сечение $\mathcal{F}$ на открытом (соответственно, замкнутом) подмножестве X можно продолжить до сечения на всем X.

Предложение 5.1.5. *Любой инъективный пучок является вялым.*

Доказательство. Пусть U — открытое подмножество X. Мы построим подпучок $\mathcal{J}_U$ пучка колец $\mathcal{O}$ такой, что $\mathrm{Hom}(\mathcal{J}_U, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(U)$ для любого пучка модулей $\mathcal{F}$. Тогда мы сможем рассматривать всякое сечение s пучка $\mathcal{F}$ над U как гомоморфизм пучков $\mathcal{J}_U \to \mathcal{F}$. Если $\mathcal{F}$ инъективен, этот гомоморфизм можно продолжить до гомоморфизма $\mathcal{O} \to \mathcal{F}$, то есть, сечение s можно продолжить до сечения на всем пространстве X. Остается доказать следующую лемму. □

Лемма 5.1.6. *1. Пусть $\mathcal{O}$ — пучок колец на X, $\mathcal{F}$ — $\mathcal{O}|_U$-модуль для некоторого открытого $U \subseteq X$. Тогда существует пучок $\mathcal{F}_U$ на X такой, что $\mathcal{F}_U|_U = \mathcal{F}$ и слои $(\mathcal{F}_U)_x$ равны 0 для $x \notin U$.*

2. если $\mathcal{G}$ — любой пучок на $\mathcal{X}$, то очевидное отображение ограничения

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(X)}(\mathcal{F}_U, \mathcal{G}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(U)}(\mathcal{F}, \mathcal{G}|U)$$

является изоморфизмом.

3. Если $\mathcal{F}$ является ограничением пучка $\mathcal{S}$ на U, то $\mathcal{F}_U$ — подпучок пучка $\mathcal{S}$.

4. В частности, если мы возьмем $\mathcal{S} = \mathcal{O}$, получим подпучок $\mathcal{J}_U$ пучка $\mathcal{O}$ такой, что $\mathrm{Hom}(\mathcal{J}_U, \mathcal{G}|_U) = \mathcal{G}(U)$ для любого $\mathcal{O}$-модуля $\mathcal{G}$.

Доказательство. Определим $\mathcal{F}_U(V)$ для всякого открытого $V \subseteq X$ следующим образом:

$$\mathcal{F}_U(V) = \{s \in \mathcal{F}(U \cap V) \mid \text{носитель } s \text{ замкнут в } V\}.$$

Нетрудно проверить, что сопоставление $V \mapsto \mathcal{F}_U(V)$ является предпучком. Необходимо проверить, что если (V_i) — открытое покрытие V и $s \in \mathcal{F}(U \cap V)$, то носитель s замкнут в V тогда и только тогда, когда носитель $s|_{U\cap V_i}$ замкнут в V_i для всех i; но это очевидно. Если $V \subseteq U$, то $\mathcal{F}_U(V) = \mathcal{F}(V)$, поэтому $\mathcal{F}_U|_U = \mathcal{F}$. С другой стороны, если $x \notin U$ и $s_x \in (\mathcal{F}_U)_x$, то s_x представляется некоторым сечением $s \in \mathcal{F}(U \cap V)$, где V — окрестность x. Тогда носитель s в $U \cap V$ замкнут в V, а его дополнение N содержит x. Ограничение s на $U \cap N$ равно 0, поэтому $s_x = 0$. Остальные пункты несложно проверить. □

Заметим, что на паракомпактном пространстве любой вялый пучок является мягким: любое сечение на открытом подмножестве можно продолжить до сечения на его окрестности, а потом, если пучок вялый, и на все пространство.

Предложение 5.1.7. *Если $\mathcal{F}$ — вялый пучок на X, а $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{A} \to \mathcal{B} \to 0$ — точная последовательность пучков, то последовательность абелевых групп $0 \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{A}(X) \to \mathcal{B}(X) \to 0$ точна.*

Доказательство. Достаточно проверить, что любое сечение $s \in \mathcal{B}(X)$ можно продолжить до сечения $t \in \mathcal{A}(X)$. Рассмотрим множество всех пар (U, τ), где $U \subseteq X$ — открытое подмножество, а $\tau \in \mathcal{A}(U)$ является поднятием сечения $s|_U$. На этом множестве можно ввести частичный порядок: $(U, \tau) < (U', \tau')$, если $U \subseteq U'$ и $\tau'|_U = \tau$. Это множество непусто (в силу сюръективности $\mathcal{A}_x \to \mathcal{B}_x$) и является индуктивным; по лемме Цорна в нем есть максимальный элемент (U_0, τ_0). Покажем, что $U_0 = X$. Если это не так, выберем $x \in X \setminus U_0$. Найдется окрестность V точки x и сечение $\tau \in \mathcal{A}(V)$, являющееся поднятием $s|_V$. Покажем, что существует сечение из $\mathcal{A}(U_0 \cup V)$, являющееся поднятием $s_{U_0 \cup V}$, ограничение которого на U_0 совпадает с τ_0, и получим противоречие с максимальностью. Для того, чтобы построить такое сечение, заметим, что τ_0 и τ не обязаны совпадать на $U_0 \cap V$, но их разность $\tau_0 - \tau$ является сечением пучка $\mathcal{F}$ над $U_0 \cap V$ (поскольку и τ_0, и τ отображаются в s). В силу вялости пучка $\mathcal{F}$ это сечение можно продолжить до сечения $t \in \mathcal{F}(X)$. Прибавляя к τ полученное сечение t, получаем новое сечение τ_1, являющееся поднятием s над V. Теперь τ_0 и τ_1 совпадают на $U_0 \cap V$, поэтому их можно склеить и получить нужное сечение на $U_0 \cup V$. □

Предложение 5.1.8. *Если $\mathcal{F}$ — мягкий пучок на паракомпактном пространстве X, а $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{A} \to \mathcal{B} \to 0$ — точная последовательность пучков, то последовательность абелевых групп $0 \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{A}(X) \to \mathcal{B}(X) \to 0$ точна.*

Доказательство. Аналогично доказательству предыдущего предложения; нужно рассматривать (локально конечные) наборы замкнутых множеств, внутренности которых покрывают X, и наборы сечений пучка $\mathcal{A}$ над ними. $\square$

Пример 5.1.9. Пусть X — топологическое пространство, всякое открытое подмножество которого паракомпактно. Рассмотрим предпучок S сингулярных коцепей из примера 2.1.6 и обозначим ассоциированный с S пучок через $\widetilde{S}$. Очевидно, что отображение ограничения $\mathcal{S}(X) \to \mathcal{S}(U)$ сюръективно. По теореме 2.2.6 отображение $\mathcal{S}(U) \to \widetilde{\mathcal{S}}(U)$ сюръективно для любого U. Поэтому любое сечение $s \in \widetilde{\mathcal{S}}(U)$ можно поднять до элемента $\mathcal{S}(U)$ и затем до элемента $\mathcal{S}(X)$. Образ этого элемента в $\widetilde{\mathcal{S}}(X)$ является продолжением s, поэтому пучок $\widetilde{\mathcal{S}}$ является вялым.

Упражнения 5.1.10. *1. Пучок голоморфных функций на комплексной плоскости не является мягким.*

2. Постоянный пучок $\underline{\mathbb{Z}}$ на прямой не является мягким.

3. Пучок гладких функций на прямой не является вялым.

4. Любой пучок на дискретном пространстве является вялым. Какие из них инъективны?

Предложение 5.1.11. *Пусть $\mathcal{F}$ — пучок модулей над пучком $\mathcal{R}$ колец на топологиченском пространстве X. Существует инъективный пучок $\mathcal{I}^0$ $\mathcal{R}$-модулей, в котором $\mathcal{F}$ является подпучком.*

Итак, любой пучок $\mathcal{R}$-модулей можно вложить в инъективный: $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{I}^0 \to \mathcal{F}_1 \to 0$. Вложим теперь $\mathcal{F}_1$ в инъективный пучок $\mathcal{I}^1$ и получим точную последовательность $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{I}^0 \to \mathcal{I}^1 \to \mathcal{F}_2 \to 0$. Продолжая в том же духе, получим точную последовательность пучков $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{I}^0 \to \mathcal{I}^1 \to \dots \to \mathcal{I}^n \to \dots$, в которой все пучки $\mathcal{I}^i$ инъективны над $\mathcal{R}$.

Определение 5.1.12. Точная последовательность пучков вида

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{J}^0 \to \mathcal{J}^1 \to \dots \to \mathcal{J}^n \to \dots$$

называется **резольвентой** пучка $\mathcal{F}$. Мы записываем это так:

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{J}^\bullet.$$

Если, кроме того, все пучки $\mathcal{J}^i$ инъективны, эта последовательность называется **инъективной резольвентой** $\mathcal{F}$.

Идея здесь состоит в том, что для изучения многих вопросов полезно заменить пучок $\mathcal{F}$ на его инъективную резольвенту. Стандартные факты гомологической алгебры утверждают, что морфизм пучков продолжается до морфизма их инъективных резольвент (и, в частности, инъективная резольвента пучка единственна с точностью до гомотопической эквивалентности).

Определение 5.1.13. Пусть $\mathcal{F}$ — пучок, и $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{I}^\bullet$ — его инъективная резольвента. Группы когомологий комплекса

$$\mathcal{I}^0(X) \to \mathcal{I}^1(X) \to \dots \to \mathcal{I}^{i-1}(X) \to \mathcal{I}^i(X) \to \mathcal{I}^{i+1}(X) \to \dots$$

назывются **группами когомологий** $H^i(X, \mathcal{F})$ **пучка** $\mathcal{F}$.

Заметим сразу, что последовательность $0 \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{I}^0(X) \to \mathcal{I}^1(X)$ является точной в силу точности функтора глобальных сечений слева. По определению, $H^0(X,\mathcal{F})$ является ядром отображения $\mathcal{I}^0(X) \to \mathcal{I}^1(X)$. Поэтому $H^0(X,\mathcal{F})$ канонически изоморфно $\mathcal{F}(X)$. Если, кроме того, пучок $\mathcal{F}$ инъективен, то можно рассмотреть его резольвенту $\mathcal{I}^\bullet$ такую, что $\mathcal{I}^0 = \mathcal{F}$ и $\mathcal{I}^i = 0$ при $i \geq 1$. Поэтому $H^i(X,\mathcal{F}) = 0$ при всех $i \geq 1$.

Предложение 5.1.14. *Если $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ — точная последовательность пучков, то имеется следующая точная последовательность групп когомологий:*

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(\mathcal{F}') \to H^0(\mathcal{F}) \to H^0(\mathcal{F}'') \to H^1(\mathcal{F}') \to H^1(\mathcal{F}) \to H^1(\mathcal{F}'') \\ \to \dots \to H^i(\mathcal{F}') \to H^i(\mathcal{F}) \to H^i(\mathcal{F}'') \to H^{i+1}(\mathcal{F}') \to \dots . \end{aligned}$$

Для практических вычислений полезно уметь получать когомологии из других резольвент.

Лемма 5.1.15. *Пусть $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{J}^0$ — произвольная резольвента пучка $\mathcal{F}$. Предположим, что $H^i(X,\mathcal{J}^i) = 0$ для $i > 0$ и $j \geq 0$. Тогда когомологии комплекса $\mathcal{J}(X)^\bullet$ канонически изоморфны когомологиям пучка $\mathcal{F}$.*

Мы уже знаем, что когомологии инъективного пучка $H^i(X,\mathcal{F})$ равны нулю при $i \geq 1$. Есть и другие типы пучков с таким свойством.

Предложение 5.1.16. *1. Если $\mathcal{F}$ — вялый пучок, то $H^i(X,\mathcal{F}) = 0$ для всех $i \geq 1$.*

2. Если X паракомпактно и $\mathcal{F}$ — мягкий пучок, то $H^i(X,\mathcal{F}) = 0$ для всех $i \geq 1$.

5.2 Сингулярные когомологии

Напомним, что сингулярным n-симплексом σ называется непрерывное отображение $\Delta_n \to X$. Для $i = 0,\dots,n$ рассмотрим отображение $F_i\colon \Delta_{n-1} \to \Delta_n$, полученное ограничением линейного вложения $\mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^{n+1}$, «пропускающего» i-й элемент базиса $(e_0,\dots,e_n)$ пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. Композиция $\sigma \circ F_i$ является $(n-1)$-симплексом и называется **i-ой гранью** σ. Если A — абелева группа, **n-коцепь со значениями в** A сопоставляет каждому сингулярному n-симплексу элемент A. Для такой коцепи α определим ее **кограницу**: $(n+1)$-коцепь $d\alpha$, задаваемую равенством $(d\alpha)(\sigma) = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\alpha(\sigma \circ F_i)$. Несложно проверить, что $d \circ d = 0$: каждая грань размерности $n-2$ встречается в сумме с противоположными знаками. Мы получаем комплекс $S(X)^\bullet\colon 0 \to S_X^0 \to S_X^1 \to \dots \to S_X^n \to \dots$, называемый **сингулярным коцепным комплексом** пространства X. Его когомологии называются **сингулярными когомологиями** X **со значениями в** A и обозначаются через $H^i(X,A)$.

Теорема 5.2.1. *Пусть X — локально стягиваемое топологическое пространство. Сингулярные когомологии X с коэффициентами в абелевой группе A естественно изоморфны когомологиям постоянного пучка $\underline{A}$.*

5.3 Когомологии Чеха

Еще один способ сопоставить топологическому пространству последовательность групп когомологии принадлежит Чеху. Пусть $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in i}$ — открытое покрытие пространства X. Мы построим резольвенту $\mathcal{F} \to \check{\mathcal{C}}^\bullet$ для пучка $\mathcal{F}$ на X. Для открытого $U \subseteq X$ мы определим комплекс $\check{\mathcal{C}}^\bullet(U)$ и естественное отображение $\mathcal{F}(U) \to \check{\mathcal{C}}^0(U)$. Достаточно сделать это для $U = X$ и заменить для произвольного U покрытие $(U_i)_{i\in I}$ на покрытие $(U \cap U_i)_{i\in I}$ пространства U.

Для конечной последовательности индексов $\alpha\colon [0, 1, \ldots, r] \to I$ мы будем обозначать $|\alpha| = r$, $U_\alpha = \cap U_{\alpha(i)}$. Положим $\check{\mathcal{C}}^r = \prod_{|\alpha|=r} \mathcal{F}(U_\alpha)$. Для того, чтобы определить дифференциал $d\colon \check{\mathcal{C}}^r \to \check{\mathcal{C}}^{r+1}$, мы определим отображения $\sigma_k\colon \check{\mathcal{C}}^r \to \check{\mathcal{C}}^{r+1}$ для всех $0 \le k \le r+1$ и положим $d = \sum (-1)^k \sigma_k$. Для определения отображения σ_k, в свою очередь, достаточно определить композиции σ_k с проекциями $\pi_\alpha\colon \check{\mathcal{C}}^{r+1} \to \mathcal{F}(U_\alpha)$ для всех α с $|\alpha| = r+1$. Для каждого такого k рассмотрим монотонное отображение $[0, 1, \ldots, r] \to [0, 1 \ldots, r+1]$, «пропускающее» k и обозначим его композицию с α через α_k, где $|\alpha_k| = r$. Тогда $\pi_\alpha \circ \sigma_k$ можно положить равным композиции проекции $\check{\mathcal{C}}^r \to \mathcal{F}(U_{\alpha_k})$ и ограничения $\mathcal{F}(U_{\alpha_k}) \to \mathcal{F}(U_\alpha)$.

Нетрудно видеть, что мы определили комплекс. Элемент $\check{\mathcal{C}}^0$ задается набором сечений $(s_i)_{i\in I}$, где $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$. Если s — сечение $\mathcal{F}$, его ограничения дают такой набор сечений, поэтому определено отображение $\mathcal{F} \to \check{\mathcal{C}}^0$. Кроме того, дифференциал такого набора сечений равен набору $(s_j - s_i \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j))_{i,j}$. Аксиома пучка в точности говорит нам, что ядро этого дифференциала равно $\mathcal{F}(X)$. Поэтому мы получаем точную комплекс $\check{\mathcal{C}}^\bullet$ предпучков и естественное отображение $\mathcal{F} \to \check{\mathcal{C}}^\bullet$, приводящие к точной последовательности $0 \to \mathcal{F} \to \check{\mathcal{C}}^0 \to \check{\mathcal{C}}^1$. Оказывается, продолжение этой последовательности также является точным.

Предложение 5.3.1. *Определенный выше (по покрытию $\mathcal{U}$) комплекс $0 \to \mathcal{F} \to \check{\mathcal{C}}^0 \to \check{\mathcal{C}}^1 \to \ldots$ является резольвентой $\mathcal{F}$.*

Определение 5.3.2. Пусть $\mathcal{F}$ — пучок абелевых групп на топологическом пространстве X, $\mathcal{U}$ — открытое покрытие. Тогда комплекс $\check{\mathcal{C}}(X)^\bullet$, полученный взятием глобальных сечений комплекса из предыдущего предложения, называется **комплексом Чеха**, соответствующим покрытию $\mathcal{U}$.

Теорема 5.3.3. *Пусть $\mathcal{F}$ — пучок на X, $(U_i)_{i\in I}$ — открытое покрытие X такое, что для каждого набора $i_0, \ldots, i_r \in I$ с непустым пересечением $U_{i_0,\ldots,i_r} = U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_r}$ и для каждого $j > 0$ выполнено $H^j(U_{i_0,\ldots,i_r}, \mathcal{F}) = 0$. Тогда существует канонический изоморфизм между когомологиями комплекса Чеха пучка $\mathcal{F}$, соответствующим покрытию (U_i), и когомологиями $H^r(X, \mathcal{F})$ пучка $\mathcal{F}$.*

Доказательство. Несложно; достаточно доказать, что $H^i(X, \check{\mathcal{C}}^j) = 0$ при всех $i > 0$. □

5.4 Когомологии де Рама

Напомним, что гладкому многообразию M мы сопоставили комплекс де Рама $0 \to \mathcal{T}^* \to \Lambda^2\mathcal{T}^* \to \ldots$, являющийся резольвентой постоянного пучка $\underline{\mathbb{R}}$. Все пучки $\Lambda^i\mathcal{T}^*$ являются пучками $\mathcal{A}$-модулей и, следовательно, мягкие. Поэтому когомологии постоянного пучка $\underline{\mathbb{R}}$ можно вычислять с помощью указанной резольвенты.

Теорема 5.4.1 (де Рама). *Когомологии комплекса*

$$0 \to \mathcal{T}^*(X) \to \Lambda^2\mathcal{T}^*(X) \to \cdots \to \Lambda^n\mathcal{T}^*(X) \to 0$$

для гладкого n-мерного многообразия X канонически изоморфны когомологиям постоянного пучка $\underline{\mathbb{R}}$ на X.

Мы уже знаем, что пучковые когомологии изоморфны сингулярным; поэтому когомологии де Рама также изоморфны сингулярным. Опишем явный изоморфизм между ними.

Определение 5.4.2. Пусть M — гладкое многообразие. Сингулярный симплекс $s\colon \Delta_n \to M$ называется **гладким**, если s продолжается до гладкого отображения из некоторое окрестности $\Delta_n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

Аналогично конструкциям выше, можно определить комплекс $\mathcal{DS}_M^\bullet$, взяв за основу гладкие сингулярные симплексы; оказывается, что когомологии, полученные из этого комплекса, канонически изоморфны когомологиям, полученным из комплекса $\mathcal{S}_M^\bullet$ и, следовательно, изоморфны $H^*(X, A)$, где A — группа коэффициентов.

Опишем морфизм из комплекса де Рама в $\mathcal{DS}^\bullet(X)$. Пусть ω — дифференциальная форма степени r. Сопоставим ей гладкую сингулярную r-коцепь со значениями в $\mathbb{R}$ следующим образом: пусть $s\colon \Delta_r \to X$ — гладкий сингулярный симплекс. Пуллбэк формы ω является дифференциальной r-формой α на некоторой окрестности Δ_r. «Проинтегрируем» эту r-форму по Δ_r и обозначим результат через $\int_s \omega$; это вещественное число и сопоставим симплексу s. Точнее, отождествим Δ_r с $D_r = \{(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r \mid \sum_{i=1}^r x_i \leq 1, x_i \geq 0\}$ с помощью проекции $(x_0, x_1, \dots, x_n) \to (x_1, \dots, x_n)$. Тогда форма α запишется как $f(x_0, \dots, x_n)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Интеграл f по мере Лебега на D_r и обозначим через $\int_s \omega$. Мы получили линейное отображение $\Lambda^r T_X^* \to \mathcal{DS}^r(X)$.

Теорема 5.4.3 (Стокса)**.** *Отображение $\Lambda^r T^* \to \mathcal{DS}^r$, определенное интегрированием по симплексам, является морфизмом комплексов.*

Теорема 5.4.4 (де Рама)**.** *Отображение, сопоставляющее каждой дифференциальной форме степени r гладкую сингулярную коцепь, полученную интегрированием этой формы по симплексам, индуцирует изоморфизм групп когомологий де Рама и групп сингулярных когомологий.*

6 Теория Янга-Миллса

6.1 Уравнения Максвелла

Пусть M — четырехмерное пространство $\mathbb{R}^4$ с лоренцевой метрикой. Мы будем называть эту метрику **метрикой Минковского** и записывать ее в координатах $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (t, x, y, z)$ следующим образом:

$$\eta(v, w) = -v_0 w_0 + v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3.$$

Электромагнитное поле F на M состоит из электрической и магнитной компоненты. На самом деле, F является 2-формой вида $F = B + E \wedge dt$, где $E = E_x dx + E_y dy + E_z dz$ — электрическое поле (1-форма), $B = B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy$ — магнитное поле (2-форма). Отметим, что разделение F на электрическую и магнитную составляющие имеет смысл только после выбора координат в пространстве M.

Первая пара уравнений Максвелла выглядит так:

$$dF = 0.$$

На самом деле, она не зависит от метрики и ориентации, и инвариантна относительно любых гомеоморфизмов M. Для записи второй пары уравнений Максвелла нам понадобится также *плотность тока* — геометрически в каждой точке M это вектор, характеризующий скорость переноса зарядов, — и *плотность электрического заряда* — в каждой точке M это скаляр ρ, характеризующий распределение зарядов. С помощью метрики мы можем превратить в каждой точке касательный вектор плотности тока в кокасательный и собрать из них 1-форму $j = j_1 dx_1 + j_2 dx_2 + j_3 dx_3$, и соединить ее с плотностью заряда, получив 1-форму

$$J = j - \rho dt,$$

называемую просто **током**.

После этого мы можем записать вторую пару уравнений Максвелла:

$$\star d \star F = J.$$

Упражнение 6.1.1. *Обозначим через $\star_S$ звездочку Ходжа на «пространстве», то есть, на подпространстве $\mathbb{R}^3 \subseteq \mathbb{R}^4$, натянутом на x, y, z, с обычной эвклидовой метрикой. Кроме того, обозначим через d_S внешнюю производную на формах на этом пространстве $\mathbb{R}^3$, а через ∂_t — производную по времени. Покажите, что первую пару уравнений Максвелла после расщепления пространства-времени $\mathbb{R}^4$ на пространство и время можно записать так:*

$$\begin{aligned} d_S B &= 0, \\ \partial_t B + d_S E &= 0, \end{aligned}$$

а вторую пару — так:

$$\begin{aligned} \star_S d_S \star_S E &= \rho, \\ -\partial_t E + \star_S d_S \star_S B &= j. \end{aligned}$$

6.2 Группы Ли и алгебры Ли

Определение 6.2.1. Группой Ли называется гладкое многообразие G, снабженное структурой группы таким образом, что отображения $G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto gh$, и $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$, являются гладкими.

Напомним некоторые определения и обозначения: $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ — **полная линейная группа** — состоит из обратимых матриц $n \times n$ с вещественными коэффициентами; $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ — из обратимых матриц $n \times n$ с комплексными коэффициентами. $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ — подгруппы матриц с определителем 1; каждая из них называется **специальной линейной группой**. Пусть p, q — натуральные числа с $p + q = n$, и g — метрика на $\mathbb{R}^n$ сигнатуры (p, q); тогда $\mathrm{O}(p, q) = \{g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid g(Tv, Tw) = g(v, w)$ для всех $v, w \in \mathbb{R}^n\}$ — **ортогональная группа**. Подгруппа матриц определителя 1 в $O(p, q)$ обозначается через $\mathrm{SO}(p, q)$ и называется **специальной ортогональной группой**. Для $p = n$, $q = 0$, мы обозначаем эти группы просто через $\mathrm{O}(n)$ и $\mathrm{SO}(n)$. В физике большую роль играют группа $\mathrm{SO}(3)$ вращений трехмерного эвклидового пространства и группа Лоренца $\mathrm{SO}(3, 1)$, состоящая из вращений пространства Минковского. Комплексном аналогом ортогональной группы служит **унитарная группа** $\mathrm{U}(n)$, состоящая из всех *унитарных* комплексных матриц $n \times n$, то есть, матриц, сохраняющих естественное скалярное произведение на $\mathbb{C}^n$, задаваемое формулой $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{v_i} w_i$. Подгруппа матриц определителя 1 в $\mathrm{U}(n)$ обозначается через $\mathrm{SU}(n)$ и называется **специальной унитарной группой**.

Представлением группы Ли G называется гомоморфизм групп $\rho \colon G \to \mathrm{GL}(V)$, где V — конечномерное векторное пространство над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, и ρ является гладким морфизмом многообразий.

Рассмотрим матрицы

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Иногда мы будем обозначать их через $\sigma_1 = \sigma_x$, $\sigma_2 = \sigma_y$, $\sigma_3 = \sigma_z$. Эти матрицы называются **матрицами Паули** и вместе с единичной матрицей (обозначаемой также через σ_0) образуют базис пространства эрмитовых матриц 2×2. Заметим, что матрицы $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ образуют базис подпространства матриц следа 0 в пространстве всех эрмитовых матриц.

Положим $I = -i\sigma_1$, $J = -i\sigma_2$, $K = -i\sigma_3$. Нетрудно проверить, что $I^2 = J^2 = K^2 = -1$, $IJ = -JI = K$, $JK = -KJ = I$, $KI = -IK = J$. Алгебра $\mathbb{H} = \{a+bI+cJ+dK \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}$, таким образом, изоморфна алгебре кватернионов.

Упражнение 6.2.2. *Покажите, что определитель матрицы $a+bI+cJ+dK$ равен $a^2+b^2+c^2+d^2$. Покажите, что если $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ и $a^2+b^2+c^2+d^2 = 1$, то эта матрица унитарна; стало быть,* $\mathrm{SU}(2)$ *является единичной сферой S^3 в четырехмерном пространстве $\mathbb{H}$.*

Посмотрим теперь на представления группы $\mathrm{SU}(2)$. Пусть $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$. Обозначим через $\mathcal{H}_j$ пространство однородных многочленов от двух переменных с комплексными коэффициентами степени $2j$; $\mathcal{H}_j$ имеет размерность $2j+1$ и базис $x^{2j}, x^{2j-1}y, x^{2j-2}y^2, \ldots, y^{2j}$. Для любого $g \in \mathrm{SU}(2)$ рассмотрим линейный оператор $U_j(g)$ на $\mathcal{H}_j$, задаваемый равенством $(U_j(g)f)(v) = f(g^{-1}v)$ для всех $f \in \mathcal{H}_j$, $v \in \mathbb{C}^2$. Нетрудно видеть, что $U_j\colon\ \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{GL}(\mathcal{H}_j)$ — представление. Это представление называется **спин-j** представлением.

Упражнение 6.2.3. *Докажите, что спин-0 представление эквивалентно тривиальному, а спин-1/2 представление эквивалентно стандартному (то есть, действию* $\mathrm{SU}(2)$ *на $\mathbb{C}^2$ матричным умножением).*

Опишем теперь спин-1 представление. Пусть V — пространство эрмитовых матриц 2×2 следа 0. Мы можем отождествить его с $\mathbb{R}^3$, поскольку любая такая матрица является линейной комбинацией матриц σ_1, σ_2 и σ_3. Заметим, что если $T \in V$ и $g \in \mathrm{SU}(2)$, то матрица gTg^{-1} снова является эрмитовой и имеет след 0. Положим $\rho(g)(T) = gTg^{-1}$; тогда ρ является представлением $\mathrm{SU}(2)$ на пространстве V. Более того, мы утверждаем, что гомоморфизм $\rho\colon\ \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$ на самом деле пропускается через $\mathrm{SO}(3) \leq \mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$. Действительно, из упражнения 6.2.2 следует, что эвклидова длина вектора $T \in V$ равна минус определителю матрицы T; поэтому $\det(\rho(g)T) = \det(gTg^{-1}) = \det(T)$. Значит, $\rho(g)$ сохраняет расстояния и поэтому лежит в $\mathrm{O}(3)$. Кроме того, группа $\mathrm{SU}(2)$ связна и ее образ содержит 1; поэтому $\rho(g)$ лежит в той же компоненте связности $\mathrm{O}(3)$, что и 1, то есть, в $\mathrm{SO}(3)$.

Мы получили отображение $\rho\colon\ \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$. Оно является двойным накрытием: $\rho(g) = \rho(-g)$, и если $\rho(g) = 1$, то g коммутирует со всеми матрицами из V, поэтому $g = \pm 1$ (лемма Шура).

Пусть G — группа Ли. Касательное пространство к G в единице обозначается через $\mathfrak{g}$ и называется **алгеброй Ли** группы G. Операцию в $\mathfrak{g}$ проще всего определить для *матричной группы* G, то есть, для замкнутой подгруппы в полной линейной группе. Пусть, например, γ — путь в $\mathrm{SO}(3)$ такой, что $\gamma(t)$ соответствует повороту на угол t вокруг оси z:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы вычислить касательный вектор к γ в точке 1, посчитаем производную от $\gamma(t)$ и подставим $t = 0$:

$$\gamma'(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проделав аналогичное упражнение для поворотов вокруг осей x и y, получаем матрицы

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Все они лежат в алгебре Ли $\mathfrak{so}(3)$ группы $\mathrm{SO}(3)$ и порождают ее как векторное пространство (действительно, мы знаем, что группа $\mathrm{SO}(3)$ является двойным накрытием $\mathrm{SU}(2)$, гомеоморфной S^3, и потому трехмерна). Элементы этой алгебры Ли полезно воспринимать как «инфинитиземальные вращения». Скобка Ли двух матриц из алгебры Ли $\mathfrak{so}(3)$ задается формулой $[S, T] = ST - TS$.

Обратно, взятие экспоненты превращает элементы алгебры Ли в элементы группы Ли: можно доказать, что для любой группы Ли G имеется гладкое отображение $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$, однозначно задаваемое следующими свойствами:

1. $\exp(0) = 1$;

2. $\exp(sx)\exp(tx) = \exp((s+t)x)$ для всех $x \in \mathfrak{g}$, $s, t \in \mathbb{R}$;

3. $\frac{d}{dt}\exp(tx)|_{t=0} = x$.

6.3 G-расслоения и связности

Одним из способов конструкции векторных расслоений является склейка тривиальных векторных расслоений. Пусть M — многообразие, (U_α) — открытое покрытие M, V — векторное пространство, и $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ — представление некоторой группы Ли G на пространстве V. Пусть также для каждой пары индексов α, β задана **функция перехода** $g_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to G$. Склеим тривиальные расслоения $U_\alpha \times V$ в векторное расслоение $E \to M$ следующим образом: начнем с несвязного объединения $\cup_\alpha U_\alpha \times V$ и отождествим точки $(p, v) \in U_\alpha \times V$ и $(p, v') \in U_\beta \times V$, если $v = \rho(g_{\alpha\beta}(p))v'$. Мы будем сокращать это равенство до $v = g_{\alpha\beta}v'$.

Эта процедура даст нам векторное расслоение только если функции перехода удовлетворяют некоторым условиям согласованности. А именно, должно выполняться $g_{\alpha\alpha} = 1$ на U_α, и **условие коцикла** $g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = 1$ на $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$. Векторное расслоение, полученное такого рода склейкой, называется **G-расслоением**, а группа G — его **калибровочной группой**.

Каждый слой E_p, $p \in M$ такого расслоения «выглядит как V», но не каноническим образом. Для линейного оператора $T\colon E_p \to E_p$ имеет смысл спрашивать, является ли он оператором вида $\rho(g)$ для *некоторого* $g \in G$, но не имеет смысла спрашивать, образом *какого именно* $g \in G$ он является. Действительно, в другой координатной окрестности элемент $\rho(g)$ сопрягается при помощи значения функции перехода, то есть, при помощи [образа] элемента G. Мы будем говорить, что $T\colon E_p \to E_p$ **живет в** G, если $T = \rho(g)$ в некоторой тривиализованной окрестности точки p для некоторого $g \in G$. Аналогично, будем говорить, что T **живет в** $\mathfrak{g}$, если T является образом некоторого элемента алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (по представлению групп $G \to \mathrm{GL}(V)$ естественным образом строится представление алгебр Ли $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V) \equiv \mathrm{End}(V)$).

Если теперь $T \in \mathrm{End}(E)$, мы будем говорить, что T **живет в** $\mathfrak{g}$, если $T(p) \in \mathrm{End}(E_p)$ живет в $\mathfrak{g}$ для всех $p \in M$. Если же $T(p)$ живет в G для всех $p \in M$, то T называется **калибровочным преобразованием**. Множество всех калибровочных преобразований является группой, которую мы будем обозначать через $\mathcal{G}$. Основной принцип калибровочной теории состоит в том, что рассматриваемые поля должны быть сечениями некоторых G-расслоений, а физические законы должны выражаться дифференциальными уравнениями, *инвариантными относительно калибровочных преобразований*: если s — сечение, удовлетворяющее этим уравнениям, то и сечение gs должно удовлетворять этим уравнениям для любого $g \in \mathcal{G}$.

Теперь мы хотим научиться дифференцировать сечение векторного расслоения. Обычно производная функции f выглядит примерно так: $f'(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}(f(x+\varepsilon) - f(x))/\varepsilon$. Но сечение векторного расслоения $E \to M$ сопоставляет каждой точке $p \in M$ некоторый вектор в слое E_p, и совершенно неизвестно, как вычитать векторы, находящиеся в разных слоях.

Поэтому, как правило, нет никакого канонического способа дифференцировать сечения; вместо этого имеет смысл рассмотреть *все* такие способы. Способ дифференцирования сечений называется *связностью.*

Пусть $E \to M$ — векторное расслоение. **Связностью** D на E называется отображение, которое сопоставляет каждому векторному полю v на M функцию $D_v\colon \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ так, что выполняются следующие свойства:

$$\begin{aligned} D_v(\alpha s) &= \alpha D_v(s), \\ D_v(s+t) &= D_v(s) + D_v(t), \\ D_v(fs) &= v(f)s + fD_v(s), \\ D_{v+w}(s) &= D_v(s) + D_w(s), \\ D_{fv}(s) &= fD_v(s), \end{aligned}$$

для всех $v, w \in TM$, $s, t \in \Gamma(E)$, $f \in C^\infty(M)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Обратите внимание на третье свойство — - аналог правила Лейбница, которое говорит, что D_v ведет себя как дифференцирование. Для сечения s и векторного поля v сечение $D_v(s)$ называется **ковариантной производной** сечения s в направлении сечения v.

Заметим, что если D' — еще одна связность на M, то разность $A = D' - D$ (определенная формулой $A_v = D'_v - D_v$ для всех $v \in TM$) удовлетворяет всем перечисленным выше свойствам, кроме третьего: третье превращается в равенство $A_v(fs) = fA_v(s)$. Таким образом, A_v является $C^\infty(M)$-линейным отображением и, более того, A_v линейно зависит от v. Поэтому можно считать, что A является элементом $(TM)^* \otimes \Gamma(E)^* \otimes \Gamma(E)$, то есть, сечением расслоения $T^*M \otimes \mathrm{End}(E)$. Такое сечение называется **векторным потенциалом**. Обратно, если прибавить к любой связности D сечение расслоения $T^*M \otimes \mathrm{End}(E)$, получится связность. Если мы работаем в некоторой окрестности с фиксированными локальными координатами и локальной тривиализацией расслоения E, можно выбрать связность D^0, для которой $D^0_v(s) = \sum_j v(s_j)e_j$ (она называется **стандартной плоской связностью**), и любая другая связность получается из D^0 прибавлением некоторого векторного потенциала A. Однако, стандартная плоская связность не является канонической и зависит от выбора локальной тривиализации E.

Заметим также, что удобно считать векторный потенциал *дифференциальной формой со значениями в* $\mathrm{End}(E)$: действительно, обычная дифференциальная форма ω является сечением T^*M и, стало быть, по векторному полю $v \in TM$ выдает гладкую функцию на M; дифференциальная форма со значениями в $\mathrm{End}(E)$ является сечением $T^*M \otimes \mathrm{End}(E)$ и по векторному полю $v \in TM$ выдает сечение расслоения $\mathrm{End}(E)$.

Пусть E — G-расслоение, D — связность на E. В некоторой локальной тривиализации запишем D как сумму стандартной плоской связности и векторного потенциала A. Если все компоненты A в выбранных локальных координатах живут в $\mathfrak{g}$, будем называть D **G-связностью**.

Пусть E — векторное расслоение над M со связностью D. Для векторных полей v, w на M определим их **кривизну** как оператор на сечениях расслоения E, заданный формулой $F(v,w) = D_vD_w - D_wD_v - D_{[v,w]}$. Первые два слагаемых здесь — достаточно очевидный способ «измерить» отклонение от коммутирования ковариантные производных D_v и D_w. Однако, даже если сечение E тривиально и D — стандартная плоская связность, может так случиться, что ковариантные производные D_v и D_w не коммутируют только потому, что скобка Ли векторных полей v и w отлична от нуля. Слагаемое $-D_{[v,w]}$ исправляет это: в случае стандартной плоской связности на тривиальном расслоении получаем $F(v,w)(s) = 0$ для всех векторных полей v, w и для всех сечений s. Связность с нулевой кривизной называется **плоской**.

Пусть E — векторное расслоение над M со связностью D. Определим **дифференциальную p-форму со значениями в E** как сечение расслоения $E \otimes \Lambda^p T^* M$ (например, 0-форма со значениями в E — это просто сечение E). Нетрудно понять, что можно каноническим образом определить внешнее произведение формы со значениями в E и обычной формы так, что произведение формы $s \otimes \omega$ со значениями в E и обычной формы μ удовлетворяет соотношению $(s \otimes \omega) \wedge \mu = s \otimes (\omega \wedge \mu)$ и, кроме того, внешнее произведение $C^\infty(M)$-линейно.

Определим теперь **внешнюю ковариантную производную** d_D на дифференциальных формах со значениями в E следующим образом: сначала для сечения s расслоения E определим 1-форму $d_D s$ со значениями в E формулой $d_D s(v) = D_v s$ (для любого векторного поля v на M — сравните с формулой $df(v) = v(f)$). Наконец, для формы вида $s \otimes \omega$, где s — сечение E, ω — обычная дифференциальная форма, положим $d_D(s \otimes \omega) = d_D s \wedge \omega + s \otimes d\omega$.

Упражнение 6.3.1. *Докажите, что $d_D^2 \omega = F \wedge \omega$ для любой формы ω со значениями в E.*

Наконец, пусть $E \to M$ — векторное расслоение над ориентированным полу-римановым многообразием M. Определим **звездочку Ходжа** как $C^\infty(M)$-линейный оператор на дифференциальных формах со значениями в $\mathrm{End}(E)$ такой, что $\star(T \otimes \omega) = T \otimes \star\omega$ для любого сечения T расслоения $\mathrm{End}(E)$ и любой дифференциальной формы ω. **Уравнения Янга-Миллса** обобщают уравнения Максвелла и выглядят так: $d_D F = 0$ обобщает первую пару уравнений Максвелла и выполнено всегда (так же как $dF = 0$ выполнено, если $F = dA$ для векторного потенциала A) — это **тождество Бьянки**. Вторая пара уравнений Максвелла обобщается до уравнения Янга–Миллса

$$\star d_D \star F = J,$$

где J — 1-форма на M со значениями в $\mathrm{End}(E)$, называемая током.