## § 1. Введение

В нашей работе исследуется вопрос классификации надгрупп элементарной подгруппы $\mathrm{E}(\Phi, R)$ группы Шевалле типа $\Phi = \mathrm{E}_6, \mathrm{E}_7$ в минимальных неприводимых представлениях, где $R$ – коммутативное кольцо. Подобным задачам описания надгрупп посвящено много работ, но подавляющее большинство из них касается классических групп, и почти всегда рассматриваются группы над полем. Таковы работы [10]–[12], [14], [15], [16]–[18]. Лишь в недавних работах Н. А. Вавилова и В. А. Петрова [4], [5], [6] получено стандартное описание надгрупп симплектической и ортогональной элементарных групп для случая коммутативного кольца, а в работе В. А. Петрова [20] – описание надгрупп обобщенных унитарных групп для произвольного кольца с некоторым ограничением на локальный стабильный ранг. Стоит отметить также работу Р. Дая [9], в которой рассматривается исключительная группа типа $G_2$ над полем.

Доказательство подобных теорем о стандартном описании для исключительных групп представляло бы большой интерес. Поясним, что это означает. Говорят, что выполнено **стандартное описание** подгрупп в $G = \mathrm{GL}(n, R)$, содержащих $\mathrm{E}(\Phi, R)$, если для любой такой подгруппы $H$ существует единственный идеал $A \trianglelefteq R$ такой, что

$$\mathrm{E}(\Phi, R)\mathrm{E}(n, R, A) \leq H \leq N_G(\mathrm{E}(\Phi, R)\mathrm{E}(n, R, A)),$$

где $\mathrm{E}(n, R, A) = \mathrm{E}(n, A)^{\mathrm{E}(n,R)}$ – относительная элементарная группа, а $N_G$ означает взятие нормализатора в группе $G$. Для исключительных групп типа $\mathrm{E}_6$ и $\mathrm{E}_7$ в их минимальных неприводимых представлениях (размерностей 27 и 56 соответственно) неизвестно, имеет ли место стандартное описание, даже в случае, когда $R$ – поле. В нашей работе доказывается существование наибольшего такого идеала $A$, для которого

$$\mathrm{E}(\Phi, R)\mathrm{E}(n, R, A) \leq H.$$

Кроме того, мы доказываем, что группы $\mathrm{EE}_6(27, R, A) = \mathrm{E}(\mathrm{E}_6, R)\mathrm{E}(27, R, A)$ и $\mathrm{EE}_7(56, R, A) = \mathrm{E}(\mathrm{E}_7, R)\mathrm{E}(56, R, A)$ являются совершенными. При этом $R$ – произвольное коммутативное кольцо с обратимыми элементами 2 и 3.

Структура работы такова: в § 2 мы приводим важнейшие используемые определения и обозначения, в § 3 – формулируем полученные результаты в четырех теоремах. Дальнейшая часть статьи посвящена их доказательству. Четвертый параграф содержит доказательство теоремы 1. В параграфах 5, 6, 7 и 8 доказывается теорема 2, что устанавливает справедливость и теоремы 3, как замечено при их формулировке. Наконец, § 9 посвящен доказательству теоремы 4.

Я хочу искренне поблагодарить своего научного руководителя Николая Александровича Вавилова за постоянную поддержку и помощь в данном исследовании. Также я выражаю свою благодарность университету города Билефельда, в котором проходили последние этапы работы над текстом, и Энтони Баку за руководство стажировкой и плодотворные беседы.

## § 2. Определения и обозначения

Далее везде $\Phi = \mathrm{E}_6$ или $\Phi = \mathrm{E}_7$. В ситуациях, когда имеет значение, какой именно из двух случаев имеет место, мы будем отделять высказывания для $\Phi = \mathrm{E}_6$ и $\Phi = \mathrm{E}_7$ знаком 'risp'. Пусть $P$ – решетка, лежащая между решеткой корней $Q(\Phi)$ и решеткой весов $P(\Phi)$. Для некоторого фиксированного порядка на $\Phi$ мы обозначаем через $\Phi^+$, $\Phi^-$ множества положительных и отрицательных корней по отношению к этому порядку, и через $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l\}$ – соответствующее множество простых корней ($l = 6$ risp 7). В нумерации простых корней мы всегда следуем Бурбаки [1]. По системе корней $\Phi$, решетке $P$ и коммутативному кольцу с единицей $R$ можно построить **группу Шевалле** $\mathrm{G} = \mathrm{G}_P(\Phi, R)$, являющуюся группой точек над $R$ аффинной групповой **схемы Шевалле-Демазюра**. Мы всегда будем считать, что наша группа Шевалле **односвязна**, то есть $P = P(\Phi)$ и опускать указание на $P$ в записи группы.

Мы считаем, что в комплексной простой алгебре Ли $L$ типа $\Phi$ выбран положительный базис Шевалле и построена алгебра Шевалле $L_R$. Таким образом, задан расщепимый максимальный тор $\mathrm{T}(\Phi, R)$ в $\mathrm{G}$ и выбрана параметризация корневых унипотентных подгрупп $X_\alpha$, $\alpha \in \Phi$ относительно этого тора. Мы обозначаем через $x_\alpha(\xi)$, где $\alpha \in \Phi$, $\xi \in R$ соответствующий элементарный корневой унипотент. В дальнейшем мы неоднократно будем пользоваться соотношениями Стейнберга между элементами $x_\alpha(\xi)$ и коммутационной формулой Шевалле [8]. Группа $X_\alpha = \{x_\alpha(\xi), \xi \in R\}$ называется **элементарной корневой подгруппой**, а группа $\mathrm{E}(\Phi, R) = \langle X_\alpha, \alpha \in \Phi\rangle$, порожденная всеми элементарными корневыми подгруппами, называется (абсолютной) **элементарной подгруппой** группы Шевалле $\mathrm{G}(\Phi, R)$.

Мы будем рассматривать группу $\mathrm{E}(\Phi, R)$ как подгруппу в $\mathrm{GL}(n, R)$, где $n = 27$ risp 56, в обычных (минимальных) представлениях. Это означает, что группа $G$ действует на **модуле Вейля** $V = V(\omega)$, где $\omega$ – некоторый доминантный вес. Мы предполагаем, что старший вес $\omega$ модуля $V$ фундаментальный и равен $\omega_1$ risp $\omega_7$. Тогда соответствующие модули $V$ **микровесовые**, см. [2], [3], [24] для более подробной информации и дальнейших ссылок. Через $\Lambda = \Lambda(\omega)$ обозначается множество весов модуля $V = V(\omega)$ с учетом кратности. На самом деле, для микровесового представления все веса имеют кратность 1, и поэтому $\Lambda$ совпадает с орбитой старшего веса $\omega$ под действием группы Вейля $W$.

Мы фиксируем **допустимый** базис $v^\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ модуля $V$. Это означает, что $x_\alpha(\xi)v^\lambda$ выражается как целочисленная линейная комбинация векторов $v^\mu$, $\mu \in \Lambda$. Для микровесовых представлений можно так нормировать допустимый базис, чтобы $x_\alpha(\xi)v^\lambda = v^\lambda + c_{\lambda\alpha}\xi v^{\lambda+\alpha}$, где все **структурные константы действия** $c_{\lambda\alpha}$ равны $\pm 1$ ('лемма Мацумото', [19], [21]). В действительности, мы всегда выбираем **кристаллический** базис, в котором все структурные константы $c_{\lambda\alpha}$ равны $+1$ для $\alpha \in \pm\Pi$ (элементарное доказательство существования такого базиса приведено в [23]).

Мы мыслим вектор $a \in V$, $a = \sum a_\lambda v^\lambda$ как столбец координат $a = (a_\lambda)$,

$\lambda \in \Lambda$. При этом элемент $b$ контраградиентного модуля $V^*$ естественно представлять себе как строку $b = (b_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$. Мы индексируем как столбцы, так и строки весами модуля $V$, то есть элементами $\Lambda$. Таким образом, строки и столбцы матриц из $\mathrm{GL}(V, R) = \mathrm{GL}(n, R)$ нумеруются весами представления, то есть элементами $\lambda, \mu, \nu, \rho, \sigma, \tau, \dots \in \Lambda$. Везде в работе под коммутатором $[x, y]$ имеется в виду левонормированный коммутатор: $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$.

Основное средство для дальнейших вычислений заключено в следующем утверждении, скопированном из [3]:

**Лемма 0.** *Для любых $g \in \mathrm{GL}(n, R)$, $\alpha \in \Phi$ и $\xi \in R$ имеют место формулы*

$$(x_\alpha(\xi)g)_{\rho\sigma} = g_{\rho\sigma} \pm \xi g_{\rho-\alpha,\sigma}, \qquad (gx_\alpha(\xi))_{\rho\sigma} = g_{\rho\sigma} \pm \xi g_{\rho,\sigma+\alpha}.$$

## § 3. Формулировка основных результатов

Нашей целью является доказательство следующих двух теорем:

**Теорема 1.** *Пусть $A \trianglelefteq R$. Тогда*

$$\mathrm{E}(n, A)^{\mathrm{E}(\Phi,R)} = \mathrm{E}(n, R, A),$$

*где, как обычно,* $\mathrm{E}(n, R, A) = \mathrm{E}(n, A)^{\mathrm{E}(n,R)}$.

**Теорема 2.** *Пусть $H$ – подгруппа в $\mathrm{GL}(n, R)$, содержащая $\mathrm{E}(\Phi, R)$, причем $2, 3 \in R^*$. Для $\lambda, \mu \in \Lambda$, $\lambda \neq \mu$ положим $A_{\lambda\mu} = \{\xi \in R \mid t_{\lambda\mu}(\xi) \in H\}$. Тогда для любых $\rho, \sigma \in \Lambda$, $\rho \neq \sigma$ имеем $A_{\lambda\mu} = A_{\rho\sigma} = A$, причем $A \trianglelefteq R$.*

Из этих двух теорем немедленно следует

**Теорема 3.** *Пусть $H$ – подгруппа в $\mathrm{GL}(n, R)$, содержащая $\mathrm{E}(\Phi, R)$, причем $2, 3 \in R^*$. Тогда существует единственный наибольший идеал $A \trianglelefteq R$ такой, что $\mathrm{E}(n, R, A) \leq H$. При этом, если $t_{\lambda\mu}(\xi) \in H$ для некоторых $\lambda, \mu \in \Lambda$, $\lambda \neq \mu$, то $\xi \in A$.*

Теорема 3 утверждает, что для любой промежуточной подгруппы между $\mathrm{E}(\Phi, R)$ и $\mathrm{GL}(n, R)$ найдется идеал $A \trianglelefteq R$ такой, что $H$ содержит группу $\mathrm{E}(\Phi, R)\mathrm{E}(n, R, A)$. В теореме 4 мы доказываем, что последняя группа является совершенной.

**Теорема 4.** *Пусть $R$ – коммутативное кольцо, $A \trianglelefteq R$, $2, 3 \in R^*$. Группы $\mathrm{EE}_6(27, R, A) = \mathrm{E}(\mathrm{E}_6, R)\mathrm{E}(27, R, A)$ и $\mathrm{EE}_7(56, R, A) = \mathrm{E}(\mathrm{E}_7, R)\mathrm{E}(56, R, A)$ совершенны.*

## § 4. Доказательство теоремы 1

*Доказательство.* Очевидно, что левая часть содержится в правой. Для доказательства обратного включения вспомним, что при $n \geq 3$ группа $\mathrm{E}(n, R, A)$

порождается всеми трансвекциями вида $z_{\lambda\mu}(\xi,\zeta) = {}^{t_{\mu\lambda}(\zeta)}t_{\lambda\mu}(\xi)$ для $\xi \in A, \zeta \in R$, $\lambda, \mu \in \Lambda$, $\lambda \neq \mu$ (этот факт доказан Титсом в [22]). Таким образом, достаточно убедиться, что $z_{\lambda\mu}(\xi,\zeta)$ содержится в $H = \mathrm{E}(n,A)^{\mathrm{E}(\Phi,R)}$. Доказательство этого содержится в леммах 1, 2 и 3; в лемме $i$ мы разбираем случай $d(\lambda,\mu) = i$, $i = 1, 2, 3$. Очевидно, что в нашем представлении 2 risp 3 – это максимальное расстояние между весами, и теорема доказана, как только проверена справедливость следующих лемм.

В дальнейшем везде $\zeta \in R$, $\xi \in A$. Мы будем пользоватся следующим прямым вычислением:

$$\begin{aligned} z_{\lambda\mu}(\xi,\zeta) &= t_{\mu\lambda}(\zeta)t_{\lambda\mu}(\xi)t_{\mu\lambda}(-\zeta) \\ &= (e + \zeta e_{\mu\lambda})(e + \xi e_{\lambda\mu})(e - \zeta e_{\mu\lambda}) \\ &= e + \xi e_{\lambda\mu} + \xi\zeta(e_{\mu\mu} - e_{\lambda\lambda}) - \xi\zeta^2 e_{\mu\lambda}. \end{aligned}$$

**Лемма 1.** *Пусть $d(\lambda,\mu) = 1$. Тогда ${}^{t_{\mu\lambda}(\zeta)}t_{\rho\sigma}(\xi) \in H$ для любых $\rho$, $\sigma \in \Lambda$. В частности, $z_{\lambda\mu}(\xi,\zeta) \in H$.*

*Доказательство.* Сначала рассмотрим случай $\rho = \lambda$, $\sigma = \mu$. Обозначим $\mu - \lambda = \alpha \in \Phi$ и рассмотрим

$${}^{x_\alpha(\zeta)}t_{\lambda\mu}(\xi) = x_\alpha(\zeta)t_{\lambda\mu}(\xi)x_\alpha(-\zeta) \in H.$$

Из леммы 0 легко видеть, что

$$g = x_\alpha(\zeta)t_{\lambda\mu}(\xi) = e + \xi e_{\lambda\mu} \pm \zeta\xi e_{\mu\mu} \pm \zeta e_{\mu\lambda} + \sum_{i=1}^{s}(-1)^{\varepsilon_i}\zeta e_{\nu_i+\alpha,\nu_i},$$

где $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s$ – все отличные от $\lambda$ веса $\nu$ из $\Lambda$, для которых $\nu + \alpha$ также является весом. Знаки $(-1)^{\varepsilon_i}$, с которыми они входят в эту запись, нас не интересуют; мы обращаем внимание только на знак при действии 'между' весами $\lambda$ и $\mu$, который будем выражать знаками $\pm$ и $\mp$.

После этого осталось домножить получившееся на $x_\alpha(-\zeta)$ и проследить за матричными элементами. Очевидно (см. снова лемму 0), подвергнутся изменению только элементы в позициях $(\tau,\tau')$, для которых $\tau, \tau', \tau' + \alpha \in \Lambda$. Но мы уже знаем все такие $\tau'$, для которых и $\tau'$, и $\tau' + \alpha$ являются весами: это в точности $\lambda, \nu_1, \ldots, \nu_s$. Проанализировав, при каких $\tau$ добавка $g_{\tau,\tau'+\alpha}$ не равняется нулю, мы видим, что знаки для действия 'между' весами $\nu_i$ и $\nu_i + \alpha$ противоположны, что приводит к уничтожению слагаемых, в которые входят $\nu_i$ – именно поэтому нас не интересует, какие именно знаки там были. Остается следующее выражение:

$${}^{x_\alpha(\zeta)}t_{\lambda\mu}(\xi) = gx_\alpha(-\zeta) = e \mp \xi\zeta e_{\lambda\lambda} + \xi e_{\lambda\mu} - \xi\zeta^2 e_{\mu\lambda} \pm \xi\zeta e_{\mu\mu}.$$

Мы видим, что это выражение совпадает с полученным выше выражением для $z_{\lambda\mu}(\xi,\zeta)$ с точностью до знаков в позициях $e_{\lambda\lambda}$ и $e_{\mu\mu}$, который легко поменять, заменив с самого начала $\zeta$ на $-\zeta$.

Оставшиеся случаи, когда либо $\rho\neq\lambda$, либо $\sigma\neq\mu$, на самом деле еще проще. Действительно, $y={}^{t_{\mu\lambda}(\zeta)}t_{\rho\sigma}(\xi)=[t_{\mu\lambda}(\zeta),t_{\rho\sigma}(\xi)]\cdot t_{\rho\sigma}(\xi)$. Если $\rho=\lambda$, но $\sigma\neq\mu$, то $y=t_{\mu\sigma}(\xi\zeta)t_{\rho\sigma}(\xi)\in\mathrm{E}(n,A)$. Аналогично рассматривается случай, когда $\sigma=\mu$, но $\rho\neq\lambda$. Если же $\sigma\neq\mu$ и $\rho\neq\lambda$, то эти трансвекции коммутируют, и $y=t_{\rho\sigma}(\xi)\in\mathrm{E}(n,A)$. Лемма доказана.

**Следствие.** *Пусть* $d(\lambda,\mu)=1$. *Тогда* $\mathrm{E}(n,A)^{t_{\mu\lambda}(\zeta)}\leq H$.

**Лемма 2.** *Пусть* $d(\lambda,\mu)=2$. *Тогда* $z_{\lambda\mu}(\xi,\zeta)\in H$

*Доказательство.* Найдем $\alpha,\beta\in\Phi$ такие, что $\lambda-\mu=\alpha+\beta$, причем $\lambda-\alpha=\mu+\beta\in\Lambda$ и $\lambda-\beta=\mu+\alpha\in\Lambda$. Это легко сделать: пара $(\lambda,\mu)$ переводится элементом группы Вейля в пару $(\omega,-\omega)$ risp $(\omega,\omega-\overset{012222}{1})$. Тогда можно взять, например, $\alpha=\overset{12211}{1}$ risp $\alpha=\alpha_7$ и $\beta=\overset{11221}{1}$ risp $\beta=\overset{012221}{1}$.

Обозначим $\lambda-\alpha=\mu+\beta=\kappa$, $\lambda-\beta=\mu+\alpha=\nu$. Тогда

$$\begin{aligned}
z_{\lambda\mu}(\xi,\zeta)&={}^{t_{\mu\lambda}(\zeta)}t_{\lambda\mu}(\xi)\\
&={}^{t_{\mu\lambda}(\zeta)}[t_{\lambda\nu}(\xi),t_{\nu\mu}(1)]\\
&=[t_{\lambda\nu}(\xi)t_{\mu\nu}(\xi\zeta),t_{\nu\mu}(1)t_{\nu\lambda}(-\zeta)]\\
&=t_{\lambda\nu}(\xi)t_{\mu\nu}(\xi\zeta)\cdot{}^{t_{\nu\mu}(1)t_{\nu\lambda}(-\zeta)}t_{\mu\nu}(-\xi\zeta)t_{\lambda\nu}(-\xi).
\end{aligned}$$

Таким образом, достаточно доказать, что ${}^{t_{\nu\mu}(1)t_{\nu\lambda}(-\zeta)}t_{\mu\nu}(-\xi\zeta)t_{\lambda\nu}(-\xi)\in H$. В дальнейшем мы ограничим все наши вычисления на четыре веса: $\lambda$, $\nu$, $\mu$, $\kappa$, то есть будем рассматривать четырехмерное подпространство $W$ в пространстве представления $V=\langle v^\rho|\rho\in\Lambda\rangle$, порожденное $v^\lambda$, $v^\nu$, $v^\mu$, $v^\kappa$. Этого достаточно для наших вычислений, потому что они будут включать лишь элементарные трансвекции $t_{\rho\sigma}(\zeta)$, где $\zeta\in R$, $\{\rho,\sigma\}\subset\{\lambda,\nu,\mu,\kappa\}$ и сопряжения при помощи элементов $x_\alpha(\zeta)$, $x_\beta(\zeta)$. Эти сопряжения также не выведут нас за пределы этого пространства: действительно, если элемент $g\in\mathrm{GL}(n,R)$ таков, что ‘нетривиальность действия’ $g$ заключена внутри $W$, то таков же и элемент ${}^{x_\alpha(r)}g$ – это немедленно следует из того, что представление микровесовое, поэтому ни один из элементов $\lambda+\alpha$, $\nu+\alpha$, $\mu-\alpha$, $\kappa-\alpha$ не является весом. Таким образом, ‘действия’ между весами $\rho$ и $\sigma$ (где $\rho-\sigma=\alpha$) будут уничтожать друг друга так же, как было в доказательстве леммы 1. Конечно, то же самое касается и $\beta$.

Мы будем изображать матрицы действия элементов $\mathrm{GL}(n,R)$ в ограничении на $W$ в базисе $(v^\lambda,v^\nu,v^\mu,v^\kappa)$. Обозначим $h={}^{t_{\nu\lambda}(-\zeta)}t_{\mu\nu}(-\xi\zeta)t_{\lambda\nu}(-\xi)$, $g={}^{t_{\nu\mu}(1)}h$ – элемент, принадлежность которого $H$ нам необходимо установить. Заметим, что по следствию леммы 1 элемент $h$ лежит в $H$. Будем обозначать $\widetilde{g}$, $\widetilde{h}$ матрицы из $\mathrm{GL}(4,R)$, соответствующие $g$ и $h$, ограниченным на $W$ в указанном базисе. Легко видеть, что

$$\widetilde{h}=\begin{pmatrix}1-\xi\zeta & -\xi & 0 & 0\\ \xi\zeta^2 & 1+\xi\zeta & 0 & 0\\ -\xi\zeta^2 & -\xi\zeta & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\qquad \widetilde{g}=\begin{pmatrix}1-\xi\zeta & -\xi & \xi & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\xi\zeta^2 & -\xi\zeta & 1+\xi\zeta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\widetilde{x_\alpha(\zeta)}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \zeta\\ 0 & 1 & \zeta & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Тогда элементу ${}^{x_\alpha(1)}h\in H$ соответствует следующая матрица:

$$\begin{pmatrix}1-\xi\zeta & -\xi & \xi & \xi\zeta\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\xi\zeta^2 & -\xi\zeta & 1+\xi\zeta & \xi\zeta^2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

После умножения слева на $t_{\lambda\kappa}(-\xi\zeta)t_{\mu\kappa}(-\xi\zeta^2)\in \mathrm{E}(n,A)$ мы получаем также элемент из $H$, который записывается матрицей $\widetilde{g}$.

Вообще говоря, последнее рассуждение проходит только тогда, когда знаки действия у элемента $x_\alpha(\zeta)$ в ограничении на $W$ одинаковы; тогда $x_\alpha(\zeta)$ действительно имеет такой вид, как показано выше. Но если знаки противоположны, то рассуждение не сильно меняется; при сопряжении $h$ с помощью $x_\alpha(\pm1)$ получается *почти* та же самая матрица, что и в рассмотренном случае. А именно, недиагональные элементы последнего столбца будут иметь противоположный знак. Понятно, что после этого нужно домножать на элементарные трансвекции с противоположными знаками в аргументах, и вновь получится в точности матрица $\widetilde{g}$. Значит, в любом случае $g\in H$ и лемма доказана.

**Лемма 3.** *Пусть* $d(\lambda,\mu)=3$. *Тогда* $z_{\lambda\mu}(\xi,\zeta)\in H$

*Доказательство.* Здесь $\Phi=\mathrm{E}_7$. Сейчас, как всегда, мы построим некоторую конфигурацию весов для конкретного случая $\lambda=\omega$, $\mu=-\omega$, и ‘перенесем’ ее элементом группы Вейля на произвольную пару весов на расстоянии 3 друг от друга. Возьмем $\alpha=\alpha_7$, $\beta=\begin{smallmatrix}123221\\2\end{smallmatrix}$, $\gamma=\begin{smallmatrix}123321\\1\end{smallmatrix}$. Нетрудно видеть, что $-\omega+\alpha+\beta+\gamma=\omega$ и $\alpha,\beta,\gamma\in\Phi$. Обозначим также вес $\nu=\mu+\alpha$.

Такое же вычисление, как и в начале доказательства леммы 2, показывает, что достаточно проверить включение

$$g={}^{t_{\nu\mu}(1)t_{\nu\lambda}(-\zeta)}t_{\lambda\nu}(\xi)t_{\mu\nu}(\xi\zeta)\in H.$$

Преобразуем далее:

$$g=t_{\nu\mu}(1)\cdot t_{\nu\lambda}(-\zeta)t_{\lambda\nu}(\xi)t_{\nu\lambda}(\zeta)\cdot t_{\nu\lambda}(-\zeta)t_{\mu\nu}(\xi\zeta)t_{\nu\lambda}(\zeta)\cdot t_{\nu\mu}(-1).$$

Из леммы 2 следует, что $t_{\nu\lambda}(-\zeta)t_{\lambda\nu}(\xi)t_{\nu\lambda}(\zeta) \in H$, так как $d(\lambda,\nu)=2$. Преобразуем множитель $t_{\nu\lambda}(-\zeta)t_{\mu\nu}(\xi\zeta)t_{\nu\lambda}(\zeta)$:

$$t_{\nu\lambda}(-\zeta)t_{\mu\nu}(\xi\zeta)t_{\nu\lambda}(\zeta) = t_{\mu\nu}(\xi\zeta)\cdot[t_{\mu\nu}(-\xi\zeta), t_{\nu\lambda}(-\zeta)] = t_{\mu\nu}(\xi\zeta)t_{\mu\lambda}(\xi\zeta^2) \in \mathrm{E}(n,A).$$

Мы получили, что $g = {}^{t_{\nu\mu}(1)}h$, где $h \in H$. Теперь все аналогично финальному шагу в доказательстве леммы 2: посмотрим на конкретные матрицы, чтобы сравнить $g$ и ${}^{x_\alpha(1)}h \in H$. Элементы, которые у нас получились, 'затрагивают' только веса $\lambda$, $\mu$ и $\nu$. Мы хотим коммутировать с $x_\alpha(1)$, поэтому необходимо еще включить в рассмотрение вес $\kappa = \lambda - \alpha$. Получившиеся четыре веса уже образуют подпространство, которым можно ограничиться: прибавления и вычитания корня $\alpha$ не приводят к новым весам. Итак, можно ограничить все рассмотрение четырехмерным подпространством $W$, порожденным векторами $v^\lambda$, $v^\kappa$, $v^\nu$, $v^\mu$. Мы будем записывать эти ограничения матрицами из $\mathrm{GL}(4,R)$ в базисе $(v^\lambda, v^\kappa, v^\nu, v^\mu)$.

$$\widetilde{h} = \begin{pmatrix} 1-\xi\zeta & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\xi\zeta^2 & 0 & 1-\xi\zeta & 0 \\ \xi\zeta^2 & 0 & \xi\zeta & 1 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{x_\alpha(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{{}^{x_\alpha(1)}h} = \begin{pmatrix} 1+\xi\zeta & -\xi\zeta & \xi & -\xi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \xi\zeta^2 & -\xi\zeta^2 & \xi\zeta & 1-\xi\zeta \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{g} = \begin{pmatrix} 1+\xi\zeta & 0 & \xi & -\xi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \xi\zeta^2 & 0 & \xi\zeta & 1-\xi\zeta \end{pmatrix}.$$

Видно, что после умножения слева ${}^{x_\alpha(1)}h$ на $t_{\lambda\kappa}(\xi\zeta)t_{\mu\kappa}(\xi\zeta^2) \in \mathrm{E}(n,A)$ получим $g$. К сожалению, $\widetilde{x_\alpha(1)}$ не всегда имеет такой вид, как указано выше. Знаки действия могут быть различными для пар весов $(\lambda,\kappa)$ и $(\nu,\mu)$. Очевидно, что есть только два принципиально разных случая: когда знаки одинаковые (выше мы рассмотрели именно его), и когда они разные – все сводится к ним заменой $x_\alpha(1)$ на $x_\alpha(-1)$. Таким образом, когда знаки разные, можно считать, что

$$\widetilde{x_\alpha(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

тогда

$$\widetilde{{}^{x_\alpha(1)}h} = \begin{pmatrix} 1+\xi\zeta & \xi\zeta & \xi & -\xi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \xi\zeta^2 & \xi\zeta^2 & \xi\zeta & 1-\xi\zeta \end{pmatrix},$$

и результат достигается умножением слева на $t_{\lambda\kappa}(-\xi\zeta)t_{\mu\kappa}(-\xi\zeta^2) \in \mathrm{E}(n,A)$.

## § 5. Начало доказательства теоремы 2

Напомним, что далее везде $H$ – подгруппа в $\mathrm{GL}(n,R)$, содержащая $\mathrm{E}(\Phi,R)$. Следующая лемма проверяется прямым вычислением.

**Лемма 4.** *Пусть $\lambda$, $\mu\in\Lambda$, $\lambda\neq\mu$, $\alpha\in\Phi$. $\lambda-\mu\neq\pm\alpha$.*

*а) Если $\mu-\alpha\notin\Lambda$, $\lambda+\alpha\in\Lambda$, то $[t_{\lambda\mu}(\xi),x_\alpha(\zeta)]=t_{\lambda+\alpha,\mu}(\pm\xi\zeta)$.*

*б) Если $\lambda-\alpha\notin\Lambda$, $\mu+\alpha\in\Lambda$, то $[t_{\lambda\mu}(\xi),x_\alpha(\zeta)]=t_{\lambda,\mu+\alpha}(\pm\xi\zeta)$.*

**Лемма 5.** *Пусть $\lambda$, $\mu\in\Lambda$, $d(\lambda,\mu)=1$. Тогда если $\alpha\in\Phi$ таков, что $\lambda+\alpha\in\Lambda$ и $\lambda+\alpha\neq\mu$, то $\mu-\alpha\notin\Lambda$.*

*Доказательство.* Посмотрим на диаграмму весов. Можно считать, что $\lambda=\omega$, $\mu=\omega-\delta$. Тогда если $\lambda+\alpha\in\Lambda$, то $\alpha\in\Phi^-$ и в разложение $\alpha$ по простым корням должен входить $-\alpha_1$ risp $-a_7$. Но для того, чтобы $\mu-\alpha\in\Lambda$, нужно, чтобы между $\mu-\alpha$ и $\mu$ был корень $-\alpha_1$ risp $-a_7$, что возможно только при $\alpha=\mu-\lambda$.

Теперь можно доказать часть теоремы 2:

**Лемма 6.** *Пусть $\lambda,\mu,\rho,\sigma\in\Lambda$, причем $d(\lambda,\mu)=d(\rho,\sigma)=1$. Тогда $A_{\lambda\mu}=A_{\rho\sigma}=A_1$, причем $A_1\trianglelefteq R$.*

*Доказательство.* Очевидно, что $A_{\lambda\mu}$ является подгруппой $R$ по сложению. Пункт а) леммы 4 фактически утверждает, что если $\lambda,\mu\in\Lambda$, $\lambda\neq\mu$, $\alpha\in\Phi$, $\lambda-\mu\neq\pm\alpha$, $\mu-\alpha\notin\Lambda$, то $RA_{\lambda\mu}\subset A_{\lambda+\alpha,\mu}$. Тогда по лемме 5 получаем $RA_{\lambda\mu}\subset A_{\rho\sigma}$ (можно 'прошагать' по ребрам диаграммы и заменить оба веса в индексах на нужные нам) и, кроме того, $A_{\lambda\mu}$ является идеалом в $R$. Значит, все такие идеалы совпадают.

Еще одно продвижение к теореме:

**Лемма 7.** *Пусть $\lambda,\mu,\rho,\sigma\in\Lambda$, причем $d(\lambda,\mu)=d(\rho,\sigma)=2$. Тогда $A_{\lambda\mu}=A_{\rho\sigma}=A_2$, причем $A_2\trianglelefteq R$.*

*Доказательство.* Снова будем смотреть на диаграмму весов. Можно считать, что $\mu=\omega$ и $\lambda=\omega-\genfrac{}{}{0pt}{}{22210}{1}$ risp $\lambda=\omega-\genfrac{}{}{0pt}{}{012222}{1}$ ($\genfrac{}{}{0pt}{}{22210}{1}$ risp $\genfrac{}{}{0pt}{}{012222}{1}$ не является корнем, поэтому $d(\lambda,\mu)=2$). Тогда для любого $\alpha\in\Phi^-$ выполнено $\mu-\alpha\notin\Lambda$. Значит, можно применять пункт а) леммы 4 для $\alpha\in\Phi^-$ таких, что $\lambda+\alpha\in\Lambda$. Так можно добиться, чтобы $\rho=\lambda+\alpha$ было любым другим весом таким, что $d(\rho,\mu)=2$, кроме $\rho=-\omega$ в случае $\mathrm{E}_6$, то есть получить $RA_{\lambda\mu}\subset A_{\rho\mu}$. Если же $\Phi=\mathrm{E}_6$ и $\rho=-\omega$, нужно действовать в два шага: сначала добиться $RA_{\lambda\mu}\subset A_{\rho\mu}$, где $\rho=\lambda-\genfrac{}{}{0pt}{}{01221}{1}$, а затем перейти к $\rho-\genfrac{}{}{0pt}{}{00001}{0}=-\omega$, то есть сопряжением с $x_{\alpha_6}(\pm1)$ получить $RA_{\lambda\mu}\subset A_{\rho\mu}\subset A_{-\omega,\mu}$. Доказательство завершается так же, как в предыдущей лемме.

Теперь мы установим равенство идеалов $A_1$ и $A_2$. Для этого в следующих двух леммах доказываются включения в обе стороны. Интересно, что включение $A_1\subset A_2$ легко получается теми же методами, что и предыдущие леммы в доказательстве теоремы 2. Обратное же включение потребует того, что $H$ *содержит* $\mathrm{E}(\Phi,R)$ (ранее мы использовали только то, что $H$ *нормализуется* $\mathrm{E}(\Phi,R)$), и возникнет ограничение $2,3\in R^*$.

**Лемма 8.** *$A_1\subseteq A_2$.*

*Доказательство.* Возьмем $\xi\in A_1$. По лемме 6 имеем $t_{\lambda\mu}(\xi)\in H$ для $\mu=\omega$ и $\lambda=\omega-\genfrac{}{}{0pt}{}{12210}{1}$ risp $\lambda=\omega-\genfrac{}{}{0pt}{}{012221}{1}$. В таком случае по лемме 4 $[t_{\lambda\mu}(\xi),x_{-\alpha_1}(1)]=t_{\lambda-\alpha_1,\mu}(\xi)$ risp $[t_{\lambda\mu}(\xi),x_{-\alpha_7}(1)]=t_{\lambda-\alpha_7,\mu}(\xi)$. Но так как $d(\lambda-\alpha_1,\mu)=2$ risp $d(\lambda-\alpha_7,\mu)=2$, то $\xi\in A_2$.

**Лемма 9.** *Если $2,3\in R^*$, то $A_2\subseteq A_1$.*

*Доказательство.* Сейчас нам придется посмотреть, что происходит при коммутировании трансвекции $t_{\lambda\mu}(\xi)$ с корневым элементом $x_\alpha(\zeta)$, если все еще $\lambda-\mu\neq\pm\alpha$, но $\lambda+\alpha$, $\mu-\alpha\in\Lambda$, где $\alpha\in\Phi$. Итак, возьмем $\xi\in A_2$, $\zeta\in R$ (на самом деле далее мы возьмем $\zeta=1$). Будем также считать, что $d(\lambda,\mu)=2$. Снова воспользовавшись техникой из доказательства теоремы 1, легко видеть, что

$$
\begin{aligned}
&[t_{\lambda\mu}(\xi),x_\alpha(\zeta)]=\\
(1)\qquad &\quad(e+\xi e_{\lambda\mu}+(-1)^\varepsilon\xi\zeta e_{\lambda,\mu-\alpha}+(-1)^\eta\zeta e_{\lambda+\alpha,\lambda}+(-1)^\varepsilon\zeta e_{\mu,\mu-\alpha})\\
&\quad(e-\xi e_{\lambda\mu}+(-1)^\varepsilon\xi\zeta e_{\lambda,\mu-\alpha}-(-1)^\eta\zeta e_{\lambda+\alpha,\lambda}-(-1)^\varepsilon\zeta e_{\mu,\mu-\alpha})\\
&\quad=e+(-1)^\varepsilon\xi\zeta e_{\lambda,\mu-\alpha}-(-1)^\eta\xi\zeta e_{\lambda+\alpha,\mu}+(-1)^{\varepsilon+\eta}\xi\zeta^2 e_{\lambda+\alpha,\mu-\alpha}\in H
\end{aligned}
$$

Заметим, что $d(\lambda+\alpha,\mu-\alpha)=2$ (это легко проверить непосредственно: можно считать, что $\lambda=\omega-\genfrac{}{}{0pt}{}{22210}{1}$ risp $\lambda=\omega-\genfrac{}{}{0pt}{}{012222}{1}$ и что $\alpha=\alpha_1$ risp $\alpha=\alpha_7$, после чего взглянуть на диаграмму весов). Значит, по лемме 7 имеем $t_{\lambda+\alpha,\mu-\alpha}(\pm\xi\zeta^2)\in H$, и умножением на такой элемент можно добиться $e+(-1)^\varepsilon\xi\zeta e_{\lambda,\mu-\alpha}-(-1)^\eta\xi\zeta e_{\lambda+\alpha,\mu}\in H$. Итак, мы получили, что произведение двух трансвекций $t_{\lambda,\mu-\alpha}((-1)^\varepsilon\xi\zeta)t_{\lambda+\alpha,\mu}((-1)^{\eta+1}\xi\zeta)$ лежит в $H$. Но нам необходимо найти какую-нибудь *одну* трансвекцию, лежащую в $H$.

Теперь нас будут интересовать случаи, когда $\lambda-(\mu-\alpha)=(\lambda+\alpha)-\mu=\beta$, где $\beta\in\Phi$ – фиксированный корень. Идея состоит в том, чтобы рассмотреть все трансвекции $t_{\rho\sigma}(\dots)$, для которых $\rho-\sigma=\beta$. Очевидно, что количество $k$ таких пар $(\rho,\sigma)$ равно 6 risp 12. Обозначим их $(\rho_i,\sigma_i)$, $1\le i\le k$.

Последняя часть наших рассуждений несколько замысловата, поэтому мы сначала разберем случай $\Phi=\mathrm{E}_6$, а затем внесем изменения, необходимые для случая $\Phi=\mathrm{E}_7$.

## § 6. Доказательство леммы 9: Случай $\Phi=\mathrm{E}_6$

Мы утверждаем, что для каждой *пары* таких пар $(\rho_i,\sigma_i)$ и $(\rho_j,\sigma_j)$ разность $\rho_i-\rho_j=\sigma_i-\sigma_j$ является корнем. Действительно, одна такая пара, скажем, $(\rho_i,\sigma_i)$ переводится элементом группы Вейля в пару $(\omega,\omega-\alpha_1)$ Тогда легко взглянуть на оставшиеся пять пар $(\rho_j, \sigma_j)$ на диаграмме весов и убедиться, что всегда $\rho_i - \rho_j = \omega - \rho_j$ будет корнем. Значит, можно применить наше вычисление, подставить $\zeta = 1$ и получить, что произведение трансвекций $t_{\rho_i,\sigma_i}(\pm\xi)t_{\rho_j,\sigma_j}(\pm\xi)$ лежит в $H$ для любых $1 \le i, j \le 6$, $i \ne j$. В то же время, про знаки при $\xi$ мы пока ничего не говорили. Очевидно, есть два случая: когда в таком произведении знаки совпадают, и когда они различны. То есть можно считать, что произведение $t_{\rho_i,\sigma_i}(\xi)t_{\rho_j,\sigma_j}(\pm\xi)$ лежит в $H$.

Финальная идея доказательства выглядит так: поскольку корневой элемент $x_\beta$ есть произведение шести трансвекций

$$x_\beta(\xi) = \prod_{i=1}^{6} t_{\rho_i,\sigma_i}(\pm\xi),$$

можно постараться из наших попарных произведений и этого произведения составить *одну* трансвекцию $t_{\rho_i,\sigma_i}(\pm n\xi)$ с некоторым $n \in R^*$ и получить таким образом, что $\xi \in A_1$, что и требовалось. Теперь можно взять $\beta = \delta$, чтобы все знаки в выражении $x_\beta(\xi)$ были положительны.

Сейчас нам понадобятся некоторые факты относительно знаков действия корневого элемента $x_\alpha(1)$, потому что без всякого предположения о знаках реализация нашей финальной идеи невозможна. Нам понадобится теорема 1 из [23], в которой утверждается, что если $\alpha$ – простой корень или $-\alpha$ – простой корень, то все знаки в разложении $x_\alpha(1)$ на трансвекции равны единице. В нашем случае это означает, что в формуле (1) $\eta = \varepsilon = 0$. Таким образом, если $\alpha$ или $-\alpha$ – простой корень, то полученное с помощью $x_\alpha(1)$ произведение трансвекций имеет *разные* знаки при $\xi$. Мы взяли $\beta = \delta$, и можно взять

$$\begin{gathered}
\rho_1 = \omega, \quad \rho_2 = \omega - \begin{smallmatrix}10000\\0\end{smallmatrix}, \\
\rho_3 = \omega - \begin{smallmatrix}11000\\0\end{smallmatrix}, \quad \rho_4 = \omega - \begin{smallmatrix}11100\\0\end{smallmatrix}, \\
\rho_5 = \omega - \begin{smallmatrix}11110\\0\end{smallmatrix}, \quad \rho_6 = \omega - \begin{smallmatrix}11111\\0\end{smallmatrix}, \\
\sigma_i = \rho_i - \delta, \quad 1 \le i \le 6
\end{gathered}$$

Теперь заметим, что когда мы составляем произведение трансвекций

$$t_{\rho_i,\sigma_i}(\xi)t_{\rho_{i+1},\sigma_{i+1}}(\pm\xi),$$

мы используем коммутирование при помощи $x_\alpha$, где $\alpha = \rho_i - \rho_{i+1}$ всегда является простым корнем. Значит, мы получим следующие произведения:

$$\begin{gathered}
y_1 = t_{\rho_1,\sigma_1}(\xi)t_{\rho_2,\sigma_2}(-\xi) \in H, \quad y_2 = t_{\rho_2,\sigma_2}(\xi)t_{\rho_3,\sigma_3}(-\xi) \in H, \\
y_3 = t_{\rho_3,\sigma_3}(\xi)t_{\rho_4,\sigma_4}(-\xi) \in H, \quad y_4 = t_{\rho_4,\sigma_4}(\xi)t_{\rho_5,\sigma_5}(-\xi) \in H, \\
y_5 = t_{\rho_5,\sigma_5}(\xi)t_{\rho_6,\sigma_6}(-\xi) \in H.
\end{gathered}$$

Посмотрим на произведение $h = y_1 y_2^2 y_3^3 y_4^4 y_5^5 x_\beta(-\xi) \in H$. Несложно понять, что $h = t_{\rho_6,\sigma_6}(-6\xi)$, откуда $6\xi \in A_1$ и, следовательно, $\xi \in A_1$, что завершает доказательство в рассматриваемом случае.

## § 7. Доказательство леммы 9: Случай $\Phi = \mathrm{E}_7$

Теперь мы не можем утверждать, что для *каждой пары* пар $(\rho_i, \sigma_i)$ и $(\rho_j, \sigma_j)$ разность $\rho_i - \rho_j = \sigma_i - \sigma_j$ является корнем. Если посмотреть на пару $(\rho_i, \sigma_i) = (\omega, \omega - \alpha_7)$, то эта разность является корнем только для десяти из оставшихся одиннадцати пар $(\rho_j, \sigma_j)$. Но нетрудно заметить, что в доказательстве для $\Phi = \mathrm{E}_6$ мы использовали не все возможные комбинации таких пар, а только пять штук, из которых 'составлялись' элементы $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$, $y_5$. Сейчас мы покажем, что в случае $E_7$ нам понадобится ровно одиннадцать подобных комбинаций. Итак, точно так же, как и выше, можно показать, что произведение трансвекций $t_{\rho_i,\sigma_i}(\pm\xi)t_{\rho_j,\sigma_j}(\pm\xi)$ лежит в $H$ для тех $i$, $j$, для которых разность $\rho_i - \rho_j = \sigma_i - \sigma_j$ является корнем.

Финальная идея доказательства, описанная в предыдущем параграфе, применяется к нашему случаю следующим образом. Мы снова берем $\beta = \delta$, чтобы все знаки в недиагональных матричных элементах $x_\beta(\xi)$ были положительны, и, пользуясь теоремой 1 из [23], получаем, что если $\alpha$ или $-\alpha$ – простой корень, то знаки для $x_\alpha(1)$ также равны единице, благодаря чему в формуле (1) для этих случаев $\eta = \varepsilon = 0$. Теперь берем

$$\begin{gathered}
\rho_1 = \omega, \quad \rho_2 = \omega - \begin{smallmatrix}000001\\0\end{smallmatrix}, \quad \rho_3 = \omega - \begin{smallmatrix}000011\\0\end{smallmatrix},\\
\rho_4 = \omega - \begin{smallmatrix}000111\\0\end{smallmatrix}, \quad \rho_5 = \omega - \begin{smallmatrix}001111\\0\end{smallmatrix}, \quad \rho_6 = \omega - \begin{smallmatrix}011111\\0\end{smallmatrix},\\
\rho_7 = \omega - \begin{smallmatrix}001111\\1\end{smallmatrix}, \quad \rho_8 = \omega - \begin{smallmatrix}011111\\1\end{smallmatrix}, \quad \rho_9 = \omega - \begin{smallmatrix}012111\\1\end{smallmatrix},\\
\rho_{10} = \omega - \begin{smallmatrix}012211\\1\end{smallmatrix}, \quad \rho_{11} = \omega - \begin{smallmatrix}012221\\1\end{smallmatrix}, \quad \rho_{12} = \omega - \begin{smallmatrix}012222\\1\end{smallmatrix},\\
\sigma_i = \rho_i - \delta, \quad 1 \le i \le 12.
\end{gathered}$$

Когда мы составляем произведение трансвекций для последовательных пар $(\rho_i, \sigma_i)$, $(\rho_{i+1}, \sigma_{i+1})$, получаем

$$t_{\rho_i,\sigma_i}(\xi)t_{\rho_{i+1},\sigma_{i+1}}(\pm\xi),$$

и мы используем коммутирование при помощи $x_\alpha$, где $\alpha = \rho_i - \rho_{i+1}$ является простым корнем для всех $i$, $1 \le i \le 11$, кроме $i = 6$. Кроме этого,

$$t_{\rho_5,\sigma_5}(\xi)t_{\rho_7,\sigma_7}(\pm\xi)$$

получается коммутированием при помощи $x_{\alpha_2}$. Итак, поскольку используются простые корни, то мы имеем произведения $y_i = t_{\rho_i,\sigma_i}(\xi)t_{\rho_{i+1},\sigma_{i+1}}(-\xi) \in H$, где $1 \le i \le 11$, $i \ne 6$. Положим также $y_6 = t_{\rho_5,\sigma_5}(\xi)t_{\rho_7,\sigma_7}(-\xi)$. Теперь остается посмотреть на произведение

$$h = y_1^1 y_2^2 y_3^3 y_4^4 y_5^{-1} y_6^6 y_7^7 y_8^8 y_9^9 y_{10}^{10} y_{11}^{11} x_\alpha(-\xi) \in H.$$

Несложно понять, что $h = t_{\rho_{12},\sigma_{12}}(-12\xi)$ (здесь точно так же, как в случае $\Phi = \mathrm{E}_6$, используется разложение $x_\beta(-\xi)$ в произведение двенадцати трансвекций $t_{\rho_i,\sigma_i}(\xi)$), откуда $12\xi \in A_1$ и, следовательно, $\xi \in A_1$. Лемма доказана.

## § 8. Окончание доказательства теоремы 2

Заметим, что доказательство теоремы 2 для случая $\Phi = \mathrm{E}_6$ было закончено (еще в параграфе 5), потому что 2 – максимальное расстояние между весами микровесового представления $\mathrm{E}_6$. В случае $\Phi = \mathrm{E}_7$ придется еще немного потрудиться, чтобы включить случай расстояния, равного трем. Обозначим $A = A_1 = A_2$.

**Лемма 10.** *Если $\lambda, \mu \in \Lambda$ и $d(\lambda, \mu) = 3$, то $RA \subset A_{\lambda\mu}$.*

*Доказательство.* Эта лемма доказывается почти так же, как лемма 8. Любая пара весов $(\lambda, \mu)$ на расстоянии 3 переводится элементом группы Вейля в пару $(\omega, -\omega)$. Поэтому мы будем считать, что $\lambda = -\omega$, $\mu = \omega$. Возьмем $\xi \in A$. По доказанному $t_{\lambda+\alpha_7,\mu}(\xi) \in H$. Воспользовавшись леммой 4, видим, что $[t_{\lambda+a_7,\mu}(\xi), x_{-\alpha_7}(\pm\zeta)] = t_{\lambda,\mu}(\xi\zeta)$ при надлежащем выборе знака, откуда $\xi\zeta \in A_{\lambda\mu}$.

**Лемма 11.** *Если $\lambda, \mu, \rho, \sigma \in \Lambda$ и $d(\lambda, \mu) = d(\rho, \sigma) = 3$, то $A_{\lambda\mu} \subset A_{\rho\sigma}$.*

*Доказательство.* Здесь, как и в начале доказательства леммы 9, мы коммутируем элемент $t_{\lambda\mu}(\xi)$ с $x_\alpha(\zeta)$ (см. формулу (1)), где $\xi \in A_{\lambda\mu}$, $\zeta \in R$, $\alpha \in \Phi$. Снова будем записывать ограничения наших матриц на четырехмерное подпространство $W$, порожденное базисными векторами, отвечающими весам $\mu, \mu-\alpha, \lambda+\alpha, \lambda$ (в указанном порядке). Также будем считать, что $\alpha$ или $-\alpha$ – простой корень, поэтому недиагональные матричные элементы в $x_\alpha(\zeta)$ имеют одинаковые знаки. Тогда формула (1) с учетом данных о знаках утверждает, что матрица ограничения элемента $h_1 = [t_{\lambda\mu}(\xi), x_\alpha(\zeta)]$ имеет вид

$$\widetilde{h_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\xi\zeta & \xi\zeta^2 & 1 & 0 \\ 0 & \xi\zeta & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Теперь подставим в полученное выражение $\zeta = 1$ и прокоммутируем результат с $x_{-\alpha}(\zeta)$. Заметим, что при нашем выборе $\alpha$ недиагональные матричные элементы в $x_{-\alpha}(\zeta)$ снова имеют одинаковые знаки. Обозначим результат $h_2 = [[t_{\lambda\mu}(-\xi), x_\alpha(1)], x_{-\alpha}(\zeta)]$. Вычисления показывают, что

$$\widetilde{h_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \xi\zeta & 0 & 1 & 0 \\ 2\xi\zeta + \xi\zeta^2 & -\xi\zeta & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как по построению $h_1, h_2 \in H$, то и произведение $h = h_1 h_2 t_{\lambda\mu}(-2\xi\zeta - \xi\zeta^2)$ лежит в $H$ и имеет вид

$$\widetilde{h} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi\zeta^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В частном случае $\zeta = 1$ получаем, что $t_{\lambda+\alpha,\mu-\alpha}(\xi)$ лежит в $H$. Легко видеть, что расстояние между $\lambda+\alpha$ и $\mu-\alpha$ равно трем. Действительно, два веса на расстоянии 3 соответствуют точкам в диаграмме, симметричным относительно центра, и если $\lambda$ и $\mu$ были симметричны, то $\lambda+\alpha$ и $\mu-\alpha$ останутся симметричными. Итак, мы получили, что $\xi \in A_{\lambda+\alpha,\mu-\alpha}$, откуда $A_{\lambda\mu} \subset A_{\lambda+\alpha,\mu-\alpha}$.

Теперь уже нетрудно завершить доказательство леммы. Действительно, если мы можем брать в качестве $\alpha$ любой простой или противоположный простому корень, значит, можно 'прошагать' по ребрам диаграммы и перейти от любой пары весов на расстоянии 3 к любой другой такой паре.

Обозначим через $A_3$ множество $A_{\lambda\mu}$ для $d(\lambda,\mu) = 3$. Заметим, что в отличие от лемм 6 и 7 мы еще не показали, что $A_3$ является идеалом в $R$. Мы и не будем доказывать этого напрямую, а лишь покажем совпадение аддитивной подгруппы $A_3$ и идеала $A$. Включение $A \subset A_3$ показано в лемме 10, и сейчас мы докажем обратное.

**Лемма 12.** $A_3 \subset A$.

*Доказательство.* Возьмем $\xi \in A_3$. Для наглядности зафиксируем веса $\lambda = -\omega$, $\mu = \omega$, $\alpha = \alpha_7$. Воспользуемся обозначениями из доказательства предыдущей леммы: $h_1 = [t_{\lambda\mu}(\xi), x_\alpha(\zeta)]$. Возьмем $\zeta = 1$, тогда из формулы (2) легко видеть, что после умножения $h_1$ на $t_{\lambda+\alpha,\mu-\alpha}(-\xi)$, получится элемент $h = e - \xi e_{\lambda+\alpha,\mu} + \xi e_{\lambda,\mu-\alpha}$. К счастью, в нашем случае $d(\lambda+\alpha,\mu) = d(\lambda,\mu-\alpha) = 2$, поэтому нам не придется снова проводить головокружительные трюки в духе доказательства леммы 9. Достаточно взять $\beta = \alpha_6$ и посмотреть на элемент $[h, x_\beta(1)] \in H$ (явный вид элемента $x_\beta(1)$ нам известен, потому что $\beta$ – простой корень). Несложное вычисление показывает, что $[h, x_\beta(1)] = e + \xi e_{\lambda,\mu-\alpha-\beta}$, а так как $d(\lambda,\mu-\alpha-\beta) = 2$, то получаем $\xi \in A$, что доказывает лемму, а вместе с ней и теорему 2.

## § 9. Доказательство теоремы 4

Здесь мы докажем, что группа, естественным образом появившаяся в теореме 3, является совершенной. Пусть $n = 27$ risp $n = 56$, $E = \mathrm{EE}_6(27, R, A)$ risp $E = \mathrm{EE}_7(56, R, A)$. Так как группа $\mathrm{E}(\Phi, R)$ совершенна (см. [23], [7], [13]), то достаточно доказать, что образующие группы $\mathrm{E}(n, R, A)$ лежат в $[E, E]$. Возьмем $x = z_{\lambda\mu}(\xi,\zeta)$, где, как обычно,

$$z_{\lambda\mu}(\xi,\zeta) = {}^{t_{\mu\lambda}(\zeta)}t_{\lambda\mu}(\xi), \quad \xi \in A, \zeta \in R.$$

Из теоремы 1 следует, что $x \in \mathrm{E}(n, A)^{\mathrm{E}(\Phi,R)}$, то есть $x$ можно представить в виде произведения

$$x = \prod_i x_i y_i x_i^{-1}, \qquad \text{где } x_i \in \mathrm{E}(\Phi, R), y_i \in \mathrm{E}(n, A) \subset \mathrm{E}(n, R, A).$$

Тогда $x = \prod_i [x_i, y_i] y_i$, и для любого $i$ коммутатор $[x_i, y_i]$ лежит в $[E, E]$. Остается доказать, что $\mathrm{E}(n, A) \subset [E, E]$, а это легко следует из леммы 4 в доказательстве теоремы 2. Действительно, возьмем $t_{\rho\sigma}(\xi) \in \mathrm{E}(n, A)$ и попытаемся найти такие $\lambda, \mu \in \Lambda$, $\alpha \in \Phi$, чтобы выполнялось условие пункта а) леммы 4 и при этом $\lambda + \alpha = \rho$, $\mu = \sigma$. Если это удастся, то мы получим $t_{\rho\sigma}(\xi) = [t_{\lambda\mu}(\xi), x_\alpha(\pm 1)] \in [\mathrm{E}(n, A), \mathrm{E}(\Phi, R)] \subset [E, E]$.

Для этого можно считать, что $\mu = \sigma = \omega$ – старший вес. Если $\rho \neq \omega - \alpha_1$ risp $\rho \neq \omega - \alpha_7$, то можно взять простой корень $\beta$ такой, что $\rho + \beta \in \Lambda$ и положить $\lambda = \rho + \beta$, $\alpha = -\beta$. Тогда $\lambda + \alpha = \rho$, $\mu - \alpha \notin \Lambda$, потому что $\alpha \in \Phi^-$, а $\mu$ – максимальный вес. Легко понять, что $\lambda \neq \mu$, $\lambda - \mu \neq \pm\alpha$ (поскольку может быть только $\lambda - \mu = \alpha$, но тогда $\lambda - \alpha$, $\lambda$, $\lambda + \alpha \in \Lambda$, чего не может быть).

Осталось рассмотреть случай $\sigma = \omega$, $\rho = \omega - \alpha_1$ risp $\rho = \omega - \alpha_7$. Но тогда можно взять $\alpha = \alpha_3$ risp $\alpha = \alpha_6$ и $\lambda = \rho - \alpha$ и убедиться, что все условия для применения леммы 4 выполнены. Это завершает доказательство.

## Литература


1. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли, Главы* IV – VI, М., 1972.
2. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли, Главы* VII, VIII, М., 1978.
3. Н. А. Вавилов, М. Р. Гаврилович, *$A_2$-доказательство структурных теорем для групп Шевалле типов* $\mathrm{E}_6$ *и* $\mathrm{E}_7$, Алгебра и анализ (2004).
4. Н. А. Вавилов, В. А. Петров, *О надгруппах* $\mathrm{EO}(2l, R)$, Записки Науч. Семин. ПОМИ **272** (2000), 68–85.
5. Н. А. Вавилов, В. А. Петров, *О надгруппах* $\mathrm{Ep}(2l, R)$, Алгебра и анализ **15** (2003), no. 4, 72–114.
6. Н. А. Вавилов, В. А. Петров, *О надгруппах* $\mathrm{EO}(n, R)$, Алгебра и анализ (2004).
7. Н. А. Вавилов, Е. Б. Плоткин, А. В. Степанов, *Вычисления в группах Шевалле над коммутативными кольцами*, Докл. АН СССР **40** (1990), no. 1, 145–147.
8. Р. Стейнберг, *Лекции о группах Шевалле*, М., 1975.
9. R. H. Dye, *A quick geometrical proof that $G_2(K)$ is maximal in $P\Omega_7(K)$*, Geom. Dedicata **26** (1988), no. 3, 361–364.
10. R. H. Dye, *Interrelations of symplectic and orthogonal groups in characteristic 2*, J. Algebra **59** (1979), no. 1, 202–221.
11. R. H. Dye, *On the maximality of the orthogonal groups in the symplectic groups in characteristic two*, Math. Z **172** (1980), no. 3, 203–212.
12. R. H. Dye, *Maximal soubgroups of* $\mathrm{GL}_{2n}(K)$*,* $\mathrm{SL}_{2n}(K)$*,* $\mathrm{PGL}_{2n}(K)$*,* $\mathrm{PSL}_{2n}(K)$ *associated with symplectic polarities*, J. Algebra **66** (1980), no. 1, 1–11.
13. R. Hazrat, N. A. Vavilov, $\mathrm{K}_1$ *of Chevalley groups are nilpotent*, J. Pure Appl. Algebra **179** (2003,), 99–116.
14. O. H. King, *On subgroups of the special linear group containing the special orthogonal group*, J. Algebra **96** (1985), no. 1, 178–193.
15. O. H. King, *On subgroups of the special linear group containing the special unitary group*, Geom. Dedic **19** (1985), no. 3, 297–310.
16. Sh. Li, *Overgroups of* $\mathrm{SU}(n, K, f)$ *or* $\Omega(n, K, Q)$ *in* $\mathrm{GL}(n, K)$, Geom. Dedic **33** (1990), no. 3, 241–250.
17. Sh. Li, *Overgroups of a unitary group in* $\mathrm{GL}(2, K)$, J. Algebra **149** (1992), no. 2, 275–286.
18. Sh. Li, *Overgroups in* $\mathrm{GL}(n, F)$ *of a classical group over a subfield of* $F$, Algebra Colloq **1** (1994), no. 4, 335–346.
19. H. Matsumoto, *Sur les sous-groupes arithmetiques des groupes semi-simples déployés*, Ann.

Sci. Ecole Norm. Sup., 4ème sér. (1969), no. 2, 1–62.

20. V. Petrov, *Overgroups of Unitary Groups*, K-Theory **29** (2003), 147–174.
21. M. R. Stein, *Stability theorems for* $K_1$, $K_2$ *and related functors modeled on Chevalley groupes*, Japan J. Math. **4** (1978), no. 1, 77–108.
22. F. Tits, *Systèmes générateurs de groupes de congruences*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér A **283** (1976), 693–695.
23. N. Vavilov, *A Third Look at Weight Diagrams*, Rendiconti del Sem. Mat. Univ. Padova **104** (2000), 201–250.
24. N. A. Vavilov, *Structure of Chevalley groups over commutative rings*, Proc. Conf. Non-associative algebras and related topics (Hiroshima – 1990), World Sci. Publ., London et al., 1991, pp. 219–335.